BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

2.1 KONSEP DASAR TIME SERIES

Time series merupakan serangkaian pengamatan berdasarkan urutan waktu. Antar urutan waktu pada suatu variabel yang berdekatan saling berkolerasi artinya, tiap pengamatan yang diambil dari variabel yang berkolerasi dengan variabel itu sendiri pada waktu sebelumnya secara dinamis (Abraham and Johannes: 192, 2005). Pengamatan yang di lakukan harus memiliki interval waktu yang sama (hari, minggu, bulan, tahun). Dari pengamatan data tersebut, dapat di lihat pola data menurun, naik ataupun mengalami siklus atau fluktuatif. Pola yang di dapatkan digunakan untuk identifikasi model yang selanjutnya di gunakan untuk peramalan.

Model deret waktu pada time series ada dua, yaitu deterministic dan model deret waktu stokastik. Serangkaian pengamatan di kategorikan dalam model deret waktu deterministic apabila nilai dari serangkaian pengamatan tersebut dapat di rumuskan secara pasti, akan tetapi jika pengamatan tersebut belum dapat di rumuskan secara pasti dan di dekati dengan probabilistic di sebut proses stokastik (Mufidah, 2010).

2.2 Proses Stokastik dan Kestasioneran

Abraham and Johannes (192-194:2005) time series di pandang suatu pengamatan $(Z_1,Z_2,Z_3,\ldots,Z_n)$ dapat dikatakan sebagai proses stokastik. Proses stokastik secara umum merupakan distribusi n dimensi. Autokorelasi antar pengamatan $\rho(Z_1,Z_2,Z_3,\ldots,Z_n)$ diasumsikan normal, yang mana rata-rata $E(Z_1)$, $E(Z_2),E(Z_3),\ldots,E(Z_n) = \mu$, varian adalah $V(Z_1)$, $V(Z_2),V(Z_3),\ldots,V(Z_n)$, dan n(n-1)/2) covarian (Z_i,Z_j) dengan $i < j$. proses stokastik adalah suatu proses variabel random yang nilainya tidak dapat di tentukan secara pasti, tetapi di rumuskan dengan pendekatan probabilistic.

Proses stasioner adalah proses keseimbangan yang akan menjadikan data konstan. Kestasioneran data artinya data tidak naik ataupun turun atau fluktuasi data berada di sekitaran rata-rata dan varian yang konstan. Peluang keseimbangan yang berdistribusi pada waktu $(t_1,t_2,\ldots,t_m)$. memiliki peluang distribusi yang sama dengan $(t_1 + k, t_2 + k, \ldots, t_m + k)$ (Abraham and Johannes: 194, 2015).

Ketidakstasioneran dalam time series di bedakan menjadi dua, yaitu tidak stasioner dalam mean (disebabkan μ_i tidak konstan) dantidak stasioner terhadap varians (disebabkan σ^2_t yang dependent terhadap deret waktu). Tidak stasioner dalam mean dapat diatasi dengan melakukan differencing (pembedaan) dan untuk menstasionerkan varians dilakukan transformasi (Wei, 2006).

2.3 Model Autocorrelation Function (ACF) dan Partial Autocorrelation Function (PACF)

Statistika kunci dalam analisis deret waktu adlah koefisien autokorelasi (korelasi deret waktu dengan deret waktu itu sendiri dengan selisih waktu (lag) 0, 1, 2 periode atau lebih). Koefisien autokorelasi adalah suatu fungsi yang menunjukan besarnya korelasi (hubungan linier) antara pengamatan pada waktu ke t (dinotasikan dengan Zt) dengan pengamatan pada waktu-waktu yang sebelumnya (dinotasikan dengan Z_{t-1}, Z_{t-2}, . . . , Z_{t-k}).

Rumus autokorelasi parsial atau ϕ_{kk} adalah:

$$\phi_{kk} = \mathrm{Corr}(Z_t, Z_{t+k} \mid Z_{t+1}, \ldots, Z_{t+k-1}) \tag{2.1}$$

Nilai PACF dapat di tulis dengan persamaan sebagi berikut

$$\phi_{kk} = \frac{\rho_k - \sum_{j=1}^{k-1} \phi_{k-1,j}\ \rho_j}{1 - \sum_{j=1}^{k-1} \phi_{k-1,j}\ \rho_j}$$

dimana $\phi_{ij} = \phi_{jj} - \phi_{ii}\ \phi_{jj}$ (2.2)

2.4 Model Autoregressive Integrated Function (ARIMA)

Model autoregressive/Integrated/Moving Average (ARIMA) telah dipelajari secara mendalam oleh George Box dan Gwilyn jenskins (1976), dan nama mereka sering si sinonimkan dengan prose ARIMA yang di terapkan untuk analisis deret waktu, peramlan dan pengendalian. Box dan Jenskins secara efektif telah berhasil mencapai kesepakatan mengenai informasi relevan yang di perlukan untuk memahami dan menggunakan model-model ARIMA untuk deret waktu satu variabel (univariate). Model ARIMA terdiri dari dua aspek yaitu aspek autoregressive dan moving average (rata-rata bergerak). Secara umum model ARIMA ini di tuliskan dengan notasi ARIMA (p, d, q), dimana p menyatakan oerde dari proses autoregressive (AR), d menyatakan perbedaan (differencing), dan q menyatakan orde dari proses moving average (MA).

Secara umum bentuk model persamaan Box Jenkins adalah sebagai berikut:

$$\phi_p(B)\Phi_P(B^S)(1-B)^d(1-B^S)^D y_t = \theta_q(B)\Theta_Q(B^S)\varepsilon_t \qquad (2.3)$$

Dimana $\phi_p(B) = 1-\phi_1 B-\phi_2 B^2-\ldots-\phi_p B^p$ adalah koefisien komponen AR non musiman dengan order p

$\Phi_P(B^S)$ = koefisien komponen AR musiman S dengan order p

$\theta_q(B) = 1-\theta_1 B-\theta_2 B^2-\ldots-\theta_q B^q$ adalah koefisien komponen MA non musiman dengan order q

$\Theta_Q(B^S)$ = koefisien komponen MA musiman S dengan order Q

ε_t = error white noise, $\varepsilon_t \sim IIDN(0,\sigma_\varepsilon^2)$

B = operator Backward

$(1-B)^d$ = pembedaan tak musiman dengan order pembedaan d

$(1-B^S)^D$ = pembedaan musiman S dengan order pembedaan D

Order pembedaan yang bernilai bulat tak negatif dapat memberikan indikasi terhadap kestasioneran suatu model ARIMA. (Box, G.E.P., Jenkins, G.M. dan Reinsel, G.C, 2008)

2.4.1 Identifikasi Model ARIMA

Tahap awal untuk melakukan identifikasi model sementara adalah menentukan apakah data deret waktu yang akan di gunakan untuk peramalan sudah stasioner atau tidak, baik dalam rata-rata maupun dalam varians. Secara sederhana, konsep stasioner dapat diartikan suatu kondisi dimana nilai suatu data tidak jauh berbeda atau mungkin sama dengan data yang lainnya.

Konsep stasioner ini secara statistic dapat dijelakan sebgai berikut:

a. Apabila suatu data deret waktu dibuat diagramnya dan kemudian tidak ada perubahan rata-rata yang jelas dari waktu ke waktu, dikatakan bahwa deret data tersebut stasioner pada rata-rata
b. Apabla diagram data deretwaktu tidak memperlihatkan adanya perubahan variansi (ragam) yang jelas dari waktu ke waktu, dapat dikatakan deret data tersebut stasioner pada variansi.
c. Apabila rata-rata mengalami perubahan dari waktu ke waktu dengan kata lain menyimpang dengan beberapa pola siklis

kecenderungan (trend-cycle), maka deret waktu tersebut mempunyai rata-rata yang tidak stasioner.

d. Apabila rata-rata suatu data deret waktu menyimpang (berubah setiap waktu) dan variansi (simpangan bakunya) tidak konstan setiap waktu, deret waktu tersebut memiliki rata-rata dan variansi yang tidak stasioner (makridakis dkk. 1998).

Apabila kondisi stasioner baik dalam rata-rata mau pun dalam variansi sudah dipenuhi, langkah selanjutnya adalah membuat diagram autokorelasi. Data disebut stasioner jika nilai-nilai autokorelasi akan turun secara drastic sampai nol setelah time-lag dua atau tiga. Jika diagram ACF cenderung turun lambat atau turun secara linier maka dapat disimpulkan data belum stasioner dalam rata-rata.

Langkah selanjutnya dalam tahap identifikasi adalah diagram fungsi autokorelasi parsial (PACF). Tujuan perhitungan autokorelasi parsial adalah membantu menetapkan model ARIMA yang paling tepat untuk peramalan. Melalui perhitungan ACF dan PACF-nya, kita dapat menentukan model autoregressive (AR) atau model moving average (MA) orde keberapa data yang sedang dianalisis.

Tabel 2.1 Struktur ACF dan PACF untuk Proses Stasioner Non Musiman

Model	**ACF**	**PACF**
Autoregressive AR (*p*)	Turun secara eksponensial	$\phi_{kk} = 0$ untuk $k > p$ atau *cut off* setelah lag p
Moving Average MA (*q*)	$\rho_k = 0$ untuk $k > q$ atau *cut off* setelah lag q	Turun secara eksponensial
ARMA (*p,q*)	• *Tails off* setelah lag ke-(q-p) • Turun secara eksponensial	• *Tails off* setelah lag ke-(p-q) • Turun secara eksponensial

Tabel 2.2 Struktur ACF dan PACF untuk Proses Stasioner Musiman

Model	Struktur ACF	Struktur PACF
AR (*P*)^s	Turun secara eksponensial pada lag-lag musimannya	*Cut off* setelah lag *s* musimannya
MA (*Q*)^s	*Cut off* setelah lag *s* musimannya	Turun secara eksponensial pada lag-lag musimannya
ARMA (*P*,*Q*)^s	Turun secara eksponensial pada lag-lag musimannya	Turun secara eksponensial pada lag-lag musimannya

2.4.2 Penaksiran Parameter

Setelah diperoleh dugaan model awal ARIMA (p, d, q), selanjutnya parameter dari model tersebut ditakdir, sehingga didapatkan besaran koefisien model. Secara penaksiran parameter model ARIMA Box-Jenkins dapat dilakukan dengan menggunakan beberapa metode seperti metode moment, metode least squared, metode maximum likelihood, dan sebagainya.

2.4.3 Pemeriksaan Diagnostik

Pemeriksaan diagnostic (diagnostic checking) dapat dibagi dalam dua bagian yaitu :

2.4.3.1 Uji Kesignifikanan Parameter

Secara umum, misalkan θ adalah suatu parameter pada model ARIMA Box-Jenkins dan ϕ merupakan estimasi parameter suatu model ARIMA, maka uji hipotesisnya adalah:

$H_0 : \phi = 0$ (tidak signifikan)

$H_1 : \phi \neq 0$ (signifikan)

Statistik uji yang digunakan adalah :

$$t_{ratio} = \frac{\hat{\phi}}{sd(\hat{\phi})} \tag{2.4}$$

Daerah penolakan

Tolak H_0 jika $|t_{ratio}| > t_{\alpha/2, df=n-np}$ dimana np adalah banyaknya parameter yang ditaksir (Wei, 2006).

a. Uji Kesesuaian Model

Uji kesesuaian model meliputi kecukupan model (uji apakah sisanya white noise) dan uji asumsi distribusi normal.

2.4.3.2. Uji sisa White Noise

secara ringkas, uj sisa white noise dapat di tuliskan sebagai berikut:

1. Hipotesis

   H_0: Model sudah memenuhi syarat cukup (sisa memenuhi syarat white noise)

   H_1: Model belum memenuhi syarat cukup (sisa tidak white noise)

   Atau dapat di tulis sebagai berikut:

   H_0: $\rho_1 = \rho_2 = \ldots = \rho_K$

   H_1: minimal ada satu $\rho_1 \neq 0$, j = 0,1,2,…,K

2. Statistik uji, yaitu statistic uji Ljung-Box atau Box-Pierce Modified:

$$Q = n(n+2)\sum_{k=1}^{K}(n-k)^{-1}\hat{\rho}_k^2$$

dimana : $\hat{\rho}_k^2 = \dfrac{\sum_{t=1}^{n-k}(\hat{a}_t - \bar{\hat{a}})(\hat{a}_{t+k} - \bar{\hat{a}})}{\sum_{t=1}^{n}(\hat{a}_t - \bar{\hat{a}})^2} \longrightarrow$ ACF residual

3. Daerah penolakan:

   Tolak H_0 jika $Q > \chi^2_{\alpha,df=K-p-q}$ dimana p dan q adalah orde dari ARMA (p,q).

2.4.3.3 Uji Asumsi Distribusi Normal

Sedangkan untuk pengujian asumsi distribusi normal dapat dilakukan secara nonparametrik menggunakan uji Kolmogorov-

Smirnov atau uji yang lain. Pengujian ini dapat dilakukan melalui hipotesis sebagai berikut :

$H_0 : F(x) = F_0(x)$ untuk semua x

$H_1 : F(x) \neq F_0(x)$ untuk beberapa x

Statistik ujinya adalah :

$$D = \sup_x \left| S(x) - F_0(x) \right| \tag{2.5}$$

dimana :

F(x) = fungsi distribusi yang belum diketahui

$F_0(x)$ = fungsi distribusi yang dihipotesiskan berdistribusi normal

S(x) = fungsi distribusi kumulatif dari data asal

2.4.3.4 Daerah penolakan :

Tolak H_0 jika $D \geq D_{(1-\alpha,n)}$ atau dapat digunakan P_value < α .

(Conover, 1999)

2.4.4 Peramalan

Jika seluruh parameter model signifikan dan seluruh asumsi sisanya terpenuhi, peramalan dapat di lakukan.

2.5 Fungsi Transfer

2.5.1 Single Input

Model fungsi transfer merupakan salah satu cara untuk menyelesaikan masalah bila terdapat lebih dari satu data time series.

Dalam statistika keadaan ini sering disebut data multivariate time series. Dalam penelitian ini deret yang digunakan berupa deret berkala bivariat dimana sebuah deret output yang dihubungkan fungsi transfer dengan deret input. (Ardiani, 2005).

Model fungsi transfer adalah suatu model yang menggambarkan nilai prediksi dari suatu time series (deret output atau Y_t) berdasarkan pada nilai-nilai dari deret itu sendiri (Y_t) dan berdasarkan pula pada data time series yang mempunyai hubungan (deret input atau X_t) dengan deret output.

Model fungsi transfer yang bersifat dinamis berpengaruh tidak hanya pada hubungan linier antara waktu ke-t input X_t dan waktu ke-t output Y_t, tetapi juga saat input X_t dengan saat $t, t+1, \ldots, t+k$ pada output Y_t.

Bentuk umum model fungsi transfer *single input* (X_t) dan *single output* (Y_t) adalah :

$$Y_t = v(B)X_t + N_t \tag{2.6}$$

dimana :

Y_t = representasi dari deret output

X_t = representasi dari deret input

N_t = pengaruh kombinasi dari seluruh faktor yang mempengaruhi Y_t (disebut gangguan)

$v(B) = (v_0B + v_1B + v_2B^2 + ... + v_kB^k)$, dimana k adalah orde fungsi transfer.

Karena adanya kemungkinan data yang tidak stasioner, maka deret input dan deret output harus ditransformasikan dengan tepat (untuk mengatasi ragam yang nonstasioner), dibedakan (untuk mengatakan nilai tengah yang nonstasioner) dan mungkin perlu dihilangkan unsur musimannya *(deseasionalized)* (untuk menyederhanakan model fungsi transfer). (Markidakis, S., S.C. Wheelwright, dan V.E McGee, 1999)

Sehingga model fungsi transfer juga ditulis sebagai berikut :

$$y_t = \frac{\omega(B)}{\delta(B)} x_{t-b} + n_t \quad atau \quad y_t = \frac{\omega(B)}{\delta(B)} x_{t-b} + \frac{\theta(B)}{\phi(B)} a_t \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} \omega(B) &= \omega_0 - \omega_1 B - \omega_2 B^2 - ... - \omega_s B^s \\ \delta(B) &= 1 - \delta_1 B - \delta_2 B^2 - ... - \delta_r B^r \\ \theta(B) &= 1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - ... - \theta_q B^q \\ \phi(B) &= 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - ... - \phi_p B^p \end{aligned} \quad (2.8)$$

Dimana :

y_t = nilai Y_t yang telah ditransformasikan dan dibedakan

x_t = nilai X_t yang telah ditransformasikan dan dibedakan

a_t = gangguan acak

r, s, p, q dan *b* konstanta.

$\theta(B)$ dan $\phi(B)$ menunjukkan operator *moving average* dan *auto regressive* untuk gangguan n_t. Sedangkan $\omega(B)$ dan $\delta(B)$ menggantikan $v(B)$ yang merupakan konstanta fungsi transfer.

2.5.1.1 Identifikasi Model Fungsi Transfer

Tahap awal dalam pembentukan model fungsi transfer adalah tahap identifikasi pada variabel input dan variabel output. Tahap identifikasi ini berguna untuk melihat perilaku dan karakteristik data yang ada. Tahapan dalam identifikasi model fungsi transfer adalah :

1. Mempersiapkan deret input dan deret output

Apabila dalam identifikasi awal deret input dan deret output, data mentah tidak stasioner, maka biasanya data tersebut dibedakan (di*difference*) terlebih dahulu (mungkin pertama-tama ditransformasikan ke bentuk logaritma) untuk menghilangkan ketidakstasioneran. (Markidakis, S., S.C. Wheelwright, dan V.E McGee, 1999)

2. *Prewhitening* deret input

Dalam fungsi transfer dari suatu sistem, yang mengubah deret input (x_t) menjadi deret output (y_t), akan sangat membantu apabila sistem input tersebut dibuat sesederhana mungkin. Dengan pemutihan ini, sistem yang ada akan menjadi lebih sederhana dan mudah dipahami karena diperoleh input yang terkendali sehingga output dapat diperiksa secara berulang –

ulang sampai sifat asli fungsi transfer tersebut menjadi terlihat jelas. (Markidakis, S., S.C. Wheelwright, dan V.E McGee, 1999)

Jika diasumsikan bahwa input series (x_t) mengikuti proses ARIMA, maka dapat didefinisikan sebagai :

$$\phi_x(B)x_t = \theta_x(B)\alpha_t \text{ menjadi } \qquad \alpha_t = \frac{\phi_x(B)}{\theta_x(B)}x_t \qquad (2.7)$$

dimana : - α_t adalah deret *white noise* dengan mean 0 dan varian σ_α^2.

- antara α_t dan x_t tidak berkorelasi.

3. *Prewhitening* deret output

Apabila transformasi *prewhitening* diterapkan pada deret input (x_t) sebagaimana persamaan (2.10) diatas, maka transformasi yang sama juga dilakukan untik deret output (y_t). Hal ini dilakukan untuk menjaga integritas hubungan fungsional. Bila pada *prewhitening* deret input dihasilkan suatu deret yang *white noise*, maka pada *prewhitening* deret output ini, belum tentu deret yang white niose. Hal ini disebabkan deret output dimodelkan secara paksa dengan menggunakan model deret inputnya. *Prewhitening* pada deret output ini dilakukan dengan cara yang sama sebagaimana *prewhitening* deret input yaitu :

$$\beta_t = \frac{\phi_x(B)}{\theta_x(B)}y_t \qquad (2.8)$$

4. Menghitung Fungsi Korelasi Silang (*Cross-Correlation Function/CCF*).

Fungsi korelasi silang digunakan untuk mengukur kekuatan dan arah hubungan diantara dua variabel random. Diberikan dua proses stokastik x_t dan y_t, dan keduanya adalah proses univariate stasioner maka kovarians silang antara keduanya merupakan fungsi dari perbedaan lag (s – t). Sehingga fungsi kovarians silang antara x_t dan y_t dapat didefinisikan sebagai berikut :

$$\gamma_{xy}(k) = E\,[(x_t - \mu_x)][\,(y_{t+k} - \mu_y)] \qquad (2.9)$$

dimana $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Maka fungsi korelasi silangnya (CCF) adalah :

$$\rho_{xy}(k) = \frac{\gamma_{xy}(k)}{\sigma_x \sigma_y} \qquad (2.10)$$

dimana σ_x dan σ_y adalah standar deviasi x_t dan y_t. (Wei, 2006)

Kedua fungsi diatas (fungsi kovarians silang dan fungsi korelasi silang) pada hakekatnya juga merupakan fungsi autokovarian dan autokorelasi. Tetapi yang membedakan adalah bahwa fungsi autokorelasi simetris terhadap titik origin, sedangkan CCF tidak simetris. Jadi apabila $\rho_{xy}(k) = \rho_{yx}(-k)$, karena

$$\begin{aligned}\gamma_{xy}(k) &= E\,[(x_t - \mu_x)\,(y_{t+k} - \mu_y)] \\ &= E\,[(y_{t+k} - \mu_y)\,(x_t - \mu_x)] \\ &= \gamma_{yx}(-k) \qquad (2.11)\end{aligned}$$

Fungsi korelasi silang tidak hanya menyatakan kekuatan hubungan antara dua variabel tetapi juga menyatakan arah hubungannya. Dalam hal ini penerapannya adalah menjamin kebenaran dalam melakukan postulat model untuk meyakinkan apakah benar saat terjadinya intervensi tersebut langsung berpengaruh terhadap data respon (lag 0). Apabila CCF tersebut signifikan pada lag positif k, berarti bahwa pengaruh dari variabel input tersebut baru terasa setelah lag ke-k.

2.5.1.2 Pembentukan Model Awal

Setelah melewati tahap identifikasi maka tahap selanjutnya adalah menentukan model awal yang kemudian dapat diuji apakah model awal akan dapat menjadi model terbaik. Ada beberapa langkah untuk membentuk model awal yaitu:

1. Penetapan (r,s,b) untuk model fungsi transfer

Setelah memperoleh hasil dari nilai *cross-correlation* maka dapat ditentukan nilai r,s,b sebagai dugaan awal. Berikut ini adalah beberapa aturan yang dapat digunakan untuk menduga nilai r,s,b dari suatu fungsi transfer (Wei, 2006) :

a. Nilai b menyatakan bahwa Y_t tidak dipengaruhi oleh X_t sampai pada periode t+b. Besarnya b sama dengan jumlah bobot respon impuls v yang tidak signifikan berbeda dari nol. Dengan demikian yang terlihat adalah deretan awal v yang nilainya mendekati nol ($v_0, v_1, ..., v_{b-1}$).

b. Nilai *s* menyatakan untuk seberapa lama deret Y_t terus dipengaruhi oleh X_t. Y_t dipengaruhi oleh X_{t-b-1}, X_{t-b-2}, X_{t-b-3}, …, X_{t-b-s}. Sehingga dapat dikatakan bahwa nilai *s* adalah jumlah dari bobot respon impuls *v* sebelum terjadinya pola menurun.

c. Nilai *r* menunjukkan bahwa Y_t dipengaruhi oleh nilai masa lalunya. Y_t dipengaruhhi Y_{t-1}, Y_{t-2}, Y_{t-3}, …, Y_{t-r}.

2. Penaksiran awal deret noise (n_t)

Dengan diperolehnya bobot respon impuls *v*, maka taksiran pendahuluan dari deret noise dihitung sebagai berikut :

$$y_t = \sum_{j=1}^{m} [\delta_j(B)]^{-1} \omega_j(B) x_{j,t-b} + n_t \qquad (2.12)$$

$$n_t = y_t - \sum_{j=1}^{m} [\delta_j(B)]^{-1} \omega_j(B) x_{j,t-b} \qquad (2.13)$$

j adalah banyaknya variabel input.

3. Penetapan model ARIMA dari deret noise

Model ARIMA deret noise dilakukan dengan melakukan penaksiran dengan model time series univariate yaitu :

$$\phi(B)\, n_t = \theta_n(B)\, a_t \qquad (2.14)$$

Dengan diperolehnya model ARIMA untuk deret noise, maka diperoleh model fungsi transfer sebagaimana persamaan

2.5.1.3 Penaksiran Parameter Model Fungsi Transfer

Setelah mengidentifikasi model fungsi transfer dalam persamaan (Wei, 2006):

$$y_t = \frac{\omega(B)}{\delta(B)} x_{t-b} + \frac{\theta(B)}{\phi(B)} a_t \tag{2.15}$$

Yang akan dihitung adalah estimasi dari $\omega = \omega_{j0}, \omega_{j1}, ..., \omega_{js}$; $\delta = \delta_{j1}, \delta_{j2}, ..., \delta_{jr}$; $\theta = \theta_1, \theta_2, ..., \theta_q$; $\phi = \phi_1, \phi_2, ..., \phi_p$. Persamaan (2.15) diatas dapat ditulis sebagai berikut :

$$\delta(B)\phi(B)y_t = \phi(B)\omega(B)x_{t-b} + \delta(B)\theta(B)a_t \tag{2.16}$$

atau ekuivalen dengan :

$$c(B)y_t = d(B)x_{t-b} + e(B)a_t \tag{2.17}$$

dimana :

$$\begin{aligned} c(B) &= \delta(B)\phi(B) = (1-\delta_1 B - ... - \delta_r B^r)(1-\phi_1 B - ... - \phi_p B^p) \\ &= (1 - c_1 B - c_2 B^2 - ... - c_{p+r} B^{p+r}) \end{aligned} \tag{2.18}$$

$$\begin{aligned} d(B) &= \phi(B)\omega(B) = (1-\phi_1 B - ... - \phi_p B^p)(\omega_0 - \omega_1 B - ... - \omega_s B^s) \\ &= (d_0 - d_1 B - d_2 B^2 - ... - d_{p+s} B^{p+s}) \end{aligned} \tag{2.19}$$

$$\begin{aligned} e(B) &= \delta(B)\theta(B) = (1-\delta_1 B - ... - \delta_r B^r)(1-\theta_1 B - ... - \theta_q B^q) \\ &= (1 - e_1 B - e_2 B^2 - ... - e_{r+q} B^{r+q}) \end{aligned} \tag{2.20}$$

Kemudian :

$$\begin{aligned} a_t &= y_t - c_1 y_{t-1} - ... - c_{p+r} y_{t-p-r} - d_0 x_{t-b} + d_1 x_{t-b-1} + ... + d_{p+s} x_{t-b-p-s} + \\ &\quad + e_1 a_{t-1} + ... + e_{r+q} a_{t-r-q} \end{aligned}$$

(2.21)

dimana c_i, d_j dan e_k adalah fungsi dari $\delta_i, \omega_j, \phi_k$ dan θ_1. Dengan asumsi a_t berdistribusi $N(0, \sigma_a^2)$ merupakan *white noise series*, didapatkan fungsi *conditional likelihood* adalah:

$$L(\delta, \omega, \phi, \theta, \sigma_a^2 \,|\, b, x, y, x_0, y_0, a_0) = (2\pi\sigma_a^2)^{-n/2} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma_a^2}\sum_{t=1}^{n} a_t^2\right] \qquad (2.22)$$

dimana x_0, y_0, a_0 adalah nilai awal untuk mencari a_t pada persamaan

2.5.1.4 Uji Diagnosa Model

Setelah taksiran parameter dari model awal diperoleh, maka dilakukan pengujian apakah model awal yang telah terbentuk memenuhi asumsi atau tidak. Adapun langkah-langkah dalam uji diagnostik model adalah (Wei, 2006) :

1. Pemeriksaan autokorelasi untuk residual model

Pemeriksaan ini dilakukan untuk mengetahui apakah pemodelan deret noise telah sesuai atau tidak. Indikator yang menunjukkan bahwa model yang dipilih telah sesuai adalah ACF dan PACF dari residual model fungsi transfer tidak menunjukkan pola tertentu.

Selain itu juga bisa digunakan statistik uji :

$$Q_0 = m(m+2)\sum_{j=1}^{K}(m-j)^{-1}\hat{\rho}_{\alpha\hat{\alpha}}(j) \qquad (2.23)$$

Statistik Q mengikuti distribusi χ^2 dengan derajat bebas (K-p-q) dimana nilai ini hanya tergantung pada banyaknya parameter dalam model deret noise.

2. Pemeriksaan cross correlation

Pemeriksaan ini dilakukan untuk mengetahui apakah deret noise dan deret input yang telah diputihkan saling independent. Pemeriksaan ini dilakukan dengan menghitung cross correlation (CCF) antara residual a_t dan α_t . Model yang sesuai adalah model yang CCF antara a_t dan α_t tidak menunjukkan pola tertentu dan terletak diantara 2 $(n-k)^{-1/2}$.

Selain itu juga bisa digunakan statistic uji :

$$Q_1 = m(m+2)\sum_{j=0}^{K}(m-j)^{-1}\hat{\rho}_{\alpha\hat{a}}(j) \qquad (2.24)$$

Statistik Q mengikuti distribusi χ^2 dengan derajat bebas (K + 1) – M dimana M adalah bamyaknya parameter δ_j dan ω_j yang diestimasi dari model fungsi transfer

$$\upsilon(B) = \omega(B) / \delta(B) \qquad (2.25)$$

2.5.1.5 Kriteria Pemilihan Model Terbaik

Apabila terdapat beberapa model ARIMA yang sesuai untuk suatu data time series, maka kriteria pemilihan biasanya berdasarkan nilai statistik yang diperoleh dari residual *in sampel* yang diperoleh dari setiap model atau residual yang diperoleh dari ramalan *out of sampel*. Dalam pembandingan *in sampel* dilakukan dengan berbagai kriteria. Model terbaik berdasarkan pembandingan *in sampel* adalah model yang semua parameternya signifikan, mempunyai residual yang *white noise* dan berdistribusi normal, serta mempunyai AIC dan SBC terkecil. Dalam pembandingan *out sampel* yang dilihat adalah ketepatan model dalam meramalkan data. Salah satu ukuran yang digunakan adalah MAPE, begitu juga untuk pemilihan model terbaik dalam fungsi transfer (Wei, 2006).

1. AIC (*Akaike's Information Criterion*)

Apabila kita asumsikan bahwa M merupakan jumlah parameter dalam model , maka Akaike memperkenalkan sebuah kriteria untuk memilih sebuah model yang disebut dengan AIC. Kriteria ini didefinisikan sebagai:

$$\text{AIC (M)} = -2 \ln (\text{maksimum likelihood}) + 2\text{ M} \tag{2.26}$$

Untuk model ARIMAdengan n pengamatan, maka akan diperoleh suatu fungsi likelihood seperti berikut :

$$\ln L(\phi, \mu, \theta, \sigma_a^2) = -\frac{n}{2} \ln 2\pi\sigma_a^2 - \frac{S(\phi, \mu, \theta)}{2\sigma_a^2} \tag{2.27}$$

dimana :

$$S(\phi, \mu, \theta) = \sum [E(a_t | \phi, \mu, \theta, Z)]^2 \tag{2.28}$$

adalah sum of squares

2. SBC (*Schwarz's Bayesian Criterion*)

Sama dengan kriteria yang dikeluarkan oleh Akaike, Schwarz dengan menggunakan kriteria Bayesian memperkenalkan SBC sebagai salah satu kriteria pemilihan model terbaik. Kriteria ini apabila didefinisikan adalah sebagai berikut :

$$\text{SBC (M)} = \text{n ln} (\hat{\sigma}_a^2) + \text{M ln(n)} \qquad (2.29)$$

Dimana $\hat{\sigma}_a^2$ adalah maksimum likelihood taksiran dari σ_a^2, M adalah jumlah parameter dalam model dan n adalah jumlah observasi yang nilainya akan sama dengan jumlah dari residual.

2.5.1.6 Penggunaan Model Fungsi Transfer Untuk Peramalan

Penggunaan model fungsi transfer untuk peramalan yang didefinisikan (Wei, 2006):

$$v(B) = \frac{\omega(B)B^b\theta_x(B)}{\delta(B)\phi_x(B)} = v_0 + v_1(B) + v_2B^2 + \ldots \qquad (2.30)$$

$$\psi(B) = \frac{\theta(B)}{\phi(B)} = 1 + \psi_1 B + \psi_2 B^2 + \ldots \qquad (2.31)$$

maka persamaan fungsi transfer dapat ditulis sebagai berikut :

$$Y_t = v(B)\alpha_t + \psi(B)a_t = \sum_{j=0}^{\infty} v_j \alpha_{t-j} + \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j a_{t-j} \qquad (2.32)$$

dimana $\psi_0 = 1$ maka :

$$Y_{t+1} = \sum_{j=0}^{\infty} v_j \alpha_{t+1-j} + \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j a_{t+1-j} \tag{2.33}$$

Apabila $\hat{Y}_t(l) = \sum_{j=0}^{\infty} v_{l+j}^{*} \alpha_{t-j} + \sum_{j=0}^{\infty} \psi_{l+j}^{*} a_{t-j}$ merupakan nilai prediksi optimal satu waktu ke depan dari Y_{t+1}, maka nilai residual dari prediksi tersebut adalah :

$$Y_{t+1} - \hat{Y}(l) = \sum_{j=0}^{l-1} \left[v_j \alpha_{t+1-j} + \psi_j a_{t+1-j} \right] - \sum_{j=0}^{\infty} \left[v_{l+j}^{*} - v_{l+j} \right] \alpha_{t-j} - \sum_{j=0}^{\infty} \left[\psi_{l+j}^{*} - \psi_{l+j} \right] a_{t-j} \tag{2.34}$$

dan kuadrat nilai rata-rata dari residual hasil prediksi adalah ;

$$E\left[Y_{t+l} \hat{Y}_t(l) \right]^2 = \sum_{j=0}^{l-1} (\sigma_\alpha^2 v_j^2 + \sigma_a^2 \psi_j^2) + \sum_{j=0}^{\infty} \sigma_\alpha^2 (v_{l+j}^{*} - v_{l+j})^2 + \sum_{j=0}^{\infty} \sigma_a^2 (\psi_{l+j}^{*} - \psi_{l=j})^2 \tag{2.35}$$

2.6 Definisi Emas

Emas digunakan sebagai standar keuangan di banyak negara dan juga sebagai alat tukar yang relatif abadi, dan diterima di semua negara di dunia. Penggunaan emas dalam bidang moneter dan keuangan berdasarkan nilai moneter absolut dari emas itu sendiri terhadap berbagai mata uang di seluruh dunia, meskipun secara resmi di bursa komoditas dunia, harga emas dicantumkan dalam mata uang dolar Amerika. Bentuk penggunaan emas dalam bidang moneter lazimnya berupa batangan emas dalam berbagai satuan berat gram sampai kilogram (Henny Mariani, 2010)

Faktor-faktor yang mempengaruhi harga emas menurut (Abdullah, 2013) adalah:

1. Inflasi yang Meningkat Melebihi Prediksi

   Tingkat inflasi biasanya akan mempengaruhi kebijakan ekonomi di setiap negara. Tingkat inflasi yang sudah diprediksi dalam bentuk persen akan dijadikan acuan untuk menetapkan tingkat suku bunga di negara tersebut.

2. Kericuhan Finansial

   Krisis moneter pada tahun 1998 dan 2008 termasuk kedalam kericuhan atau kepanikan finansial. Ini merupakan faktor yang bisa membuat harga emas tiba-tiba melonjak tidak terkendali.

3. Kenaikan Harga Minyak yang Siginifikan

   Ketika harga minyak mentah dunia naik secara signifikan, maka harga emas pun ikut mengalami kenaikan. Jika invasiini terusterusan terjadi, maka kenaikan harga minyak dunia tidak dapat dielak lagi.

4. Permintaan Emas Harga

emas akan terus naik jika permintaan emas dunia yg terus naik berbanding terbalik dengan pasokan emas yang ada. Inilah yang dinamakan sebagai hukum supply demand.

5. Kondisi Politik di Dunia

   Ketidakpastian ekonomi adalah akibat dari suhu politik dunia yang tinggi karena ketegangan yang terjadi antar negara-negara di dunia. Harga emas juga turut terpengaruhi karena faktor yang satu ini.

6. Perubahan kurs

   Melemahnya kurs dollarAS dapat mendorong kenaikan harga emas dunia. Ketika tingkat suku bunga naik, ada usaha yang besar untuk tetap menyimpan uang pada deposito ketimbang emas yang tidak menghasilkan bunga (non interest-bearing). Ini akan menimbulkan tekanan pada harga emas. Sebaliknya, ketika suku bunga turun, harga emas akan cenderung naik.

2.7 Definisi Inflasi

Secara sederhana inflasi diartikan sebagai meningkatnya harga-harga secara umum dan terus menerus. Kenaikan harga dari satu atau dua barang saja tidak dapat disebut inflasi kecuali bila kenaikan itu meluas (atau mengakibatkan kenaikan harga) pada barang lainnya. Kebalikan dari inflasi disebut deflasi.

Indikator yang sering digunakan untuk mengukur tingkat inflasi adalah Indeks Harga Konsumen (IHK). Perubahan IHK dari waktu ke waktu menunjukkan pergerakan harga dari paket barang dan jasa yang dikonsumsi masyarakat. Penentuan barang dan jasa dalam keranjang IHK dilakukan atas dasar Survei Biaya Hidup (SBH) yang dilaksanakan oleh Badan Pusat Statistik (BPS). Kemudian, BPS akan memonitor perkembangan harga dari barang dan jasa tersebut secara bulanan di beberapa kota, di pasar tradisional dan modern terhadap beberapa jenis barang/jasa di setiap kota.

Indikator inflasi lainnya berdasarkan *international best practice* antara lain:

1. **Indeks Harga Perdagangan Besar** (IHPB). Harga Perdagangan Besar dari suatu komoditas ialah harga transaksi yang terjadi antara penjual/pedagang besar pertama dengan pembeli/pedagang besar berikutnya dalam jumlah besar pada pasar pertama atas suatu komoditas.
2. **Deflator Produk Domestik Bruto** (PDB) menggambarkan pengukuran level harga barang akhir (*final goods*) dan jasa yang diproduksi di dalam suatu ekonomi (negeri). Deflator PDB dihasilkan dengan membagi PDB atas dasar harga nominal dengan PDB atas dasar harga konstan

Pengelompokan Inflasi

Inflasi yang diukur dengan IHK di Indonesia dikelompokan ke dalam 7 kelompok pengeluaran (berdasarkan *the Classification of individual consumption by purpose* - COICOP), yaitu :

1. Kelompok Bahan Makanan
2. Kelompok Makanan Jadi, Minuman, dan Tembakau
3. Kelompok Perumahan
4. Kelompok Sandang
5. Kelompok Kesehatan
6. Kelompok Pendidikan dan Olah Raga
7. Kelompok Transportasi dan Komunikasi.