BAB II

Tinjauan Pustaka

2.1 Nilai Tukar

Pergerakan nilai tukar mata uang mencerminkan harga relatif suatu mata uang terhadap mata uang lain. Fluktuasi dalam perkembangan nilai tukar mata uang akan mengakibatkan perubahan perilaku *economic agent* dalam keputusan bisnisnya. Pergerakan nilai tukar yang *overvalued*, akan berimplikasi pada semakin mahalnya harga barang impor dalam persepsi mata uang domestik. Hal ini akan berdampak pada semakin berkurangnya daya beli importir dalam pemenuhan kebutuhan produknya. Sebaliknya manakala terjadi *undervalued*, maka bagi eksportir hal tersebut akan dapat mengurangi *margin profit* yang diterimanya dari produk yang laku di pasar internasional.

Dampak pergerakan nilai tukar mata uang terhadap perilaku *economic agent* (eksportir dan impor) dapat dijelaskan melalui besarnya biaya dan harga yang muncul dari volatilitas nilai tukar. Menurut Baldwin 1989 (dalam Mukhlis, 2011), biaya yang dibutuhkan oleh economic agent untuk masuk ke pasar tersebut merupakan *sunk cost*. Adanya volatilitas nilai tukar, tidak serta merta menyebabkan *economic agent* langsung ke luar dari pasar. *Economic agent* akan menunggu saat yang tepat dimana marjin keuntungan yang diperolehnya belum pada kondisi negatif (rugi). Selanjutnya menurut Baldwin dan Krugman tersebut pada kondisi terjadinya volatilitas tersebut, terdapat hubungan asimetris antara nilai tukar yang *trigger entry and exit into the export market*.

Pergerakan nilai tukar yang berfluktuasi di pasar uang tersebut akan sangat ditentukan oleh sistem nilai tukar yang dianut oleh masing-masing negara. Sistem nilai tukar mata uang yang bersifat *fixed exchange rate*, cenderung akan mengakibatkan stabilitas nilai tukar mata uang karena adanya *supporting* dari otoritas moneter dalam bentuk intervensi di pasar uang. Sedangkan sistem nilai tukar mata uang yang menganut *floating exchange rate* akan cenderung mengakibatkan pergerakan nilai tukar mata uang yang bersifat volatil. Pada jenis nilai tukar mata uang yang bersifat volatil ini, membawa konsekuensi pada kondisi ketidakpastian yang akan dihadapi oleh *economic agent*. Ketidakpastian tersebut merupakan teka-teki yang patut dicermati oleh semua pihak dalam menjaga stabiliatas makroekonomi. Dalam hal ini Krugman memberikan penjelasan yang menarik tentang adanya *significant puzzle* dalam perilaku nilai tukar mata uang dan harga suatu barang, menurutnya volatilitas nilai tukar mata uang nominal yang sangat tinggi dapat mendorong adanya *muted reaction* terhadap harga barang riil dan hal ini dapat membawa konsekuensi pada kecilnya penyesuaian dalam volume barang yang diperdagangkan (Mukhlis, 2011).

Dijelaskan juga bahwa adanya *sunk cost* akan mendorong variabilitas pergerakan nilai tukar mata uang. Dalam modelnya yang dikenal dengan *hysteresis* model, dijelaskan bahwa sekali nilai tukar mata uang bergerak dengan sejumlah tertentu *entry* dan *exit* yang akan terjadi di pasar. Pandangan utama Krugman adalah marjin pada kejadian *hyeteresis* akan berbeda dengan sejumlah variabiltas nilai tukar yang terjadi. Nilai tukar mata uang yang terjadi sebelumnya akan digunakan untuk membentuk ekspektasi tentang perubahan nilai tukar.

Semakin besar volatilitas nilai tukar sekarang akan berdampak pada semakin besarnya volatilitas di masa depan.

Pada sisi lain Baldwin, 1988 (dalam Mukhlis, 2011) juga menjelaskan bahwa berdasarkan bukti empiris yang diperolehnya menunjukkan adanya sebuah *puzzle* tentang *import-price sluggishness* dan hal tersebut mengakibatan terjadinya *hysteresis* dalam keputusan keluar masuk pasar. Dalam hal ini pada dasarnya Krugman tidak menjelaskan secara riil adanya *price sluggshness*. Nilai tukar mata uang yang berada pada posisi rendah (*low level*) pass through dari nilai tukar dari impor barang membutuhkan penjelasan. Karena hal ini Baldwin mengajukan penggunaan *idea of path dependence* di perusahaan yang memiliki keputusan harga secara langsung. Selain itu pula dalam penjelasannya juga menjelaskan adanya hubungan terbalik antara *the size of the pass through* dan volatilitas dari nilai tukar mata uang. Sedangkan pemikiran Krugman tidak fokus secara khusus pada *pass-through elasticity*.

2.2 Prakiraan (Forecasting)

2.2.1 Pengertian Prakiraan

Prakiraan pada dasarnya merupakan suatu dugaan atau prediksi mengenai terjadinya suatu kejadian atau peristiwa di masa yang akan datang. Prakiraan dapat disebut juga dengan peramalan yang ilmiah (*educated guess*). Setiap pengambilan keputusan yang menyangkut keadaan di masa yang akan datang, maka pasti ada prakiraan yang melandasi pengambilan keputusan tersebut menurut Assauri, 1984 dalam (Purnomo, 2015). Prakiraan adalah penggunaan data masa lalu dari sebuah variabel atau kumpulan variabel untuk mengestimasi nilainya di masa yang akan datang. Asumsi dasar dalam penerapan teknik prakiraan adalah: *"if we can predict what the future will be like we can modify our behaviour now to be in a betterposition, than we otherwise would have been, when the future arrives"*.

Diartikan, jika kita dapat memprediksi apa yang terjadi di masa depan maka kita dapat mengubah kebiasaan kita saat ini menjadi lebih baik dan akan jauh lebih berbeda di masa yang akan datang. Hal ini disebabkan kinerja di masa lalu akan terus berulang setidaknya dalam masa mendatang yang relatif dekat Murahartawaty, 2009 (dalam Purnomo, 2015).

Semua institusi dan industri membutuhkan prakiraan dalam membuat keputusan yang akan dilakukan di masa yang datang, dengan prakiraan juga dapat mengendalikan penyebab terjadinya curah hujan yang berubah secara ekstrem. Untuk sektor publik, prakiraan merupakan bagian yang tidak dapat terpisahkan dari perancangan kebijakan dan program, baik dalam bidang ekonomi, pendidikan maupun kesehatan masyarakat.

2.2.2 Klasifikasi Teknik Prakiraan

Pada umumnya teknik prakiraan dapat dibedakan menjadi beberapa jenis tergantung dari cara melihatnya, yaitu :

1. Dilihat dari sifat penyusunannya.
   a. Prakiraan yang subjektif, yaitu prakiraan yang didasarkan atas perasaan atau intuisi dari orang yang menyusunnya. Dalam hal

ini pandangan orang yang menyusunnya sangat menentukan baik tidaknya hasil prakiraan tersebut.

b. Prakiraan yang objektif, yaitu prakiraan yang didasarkan atas data yang relevan pada masa lalu, dengan menggunakan teknik-teknik dan metode- metode dalam penganalisaannya.

2. Dilihat dari jangka waktu prakiraannya.

Tabel 2.1 Teknik Prakiraan Menurut Jangka Waktu Prakiraannya

Rentan Waktu	Tipe Keputusan	Contoh
Jangka Pendek	Operasional	Perencanaan Produksi, Distribusi
Jangka Menengah	Taktis	Penyewaan lokasi dan peralatan
Jangka Panjang	Strategis	Penelitian dan pengembangan akuisisi dan marger

a. Prakiraan jangka pendek *(short term forecasting)*, yaitu prakiraan yang dilakukan untuk penyusunan hasil prakiraan yang jangka waktunya harian hingga setiap jam. Biasa digunakan untuk studi perbandingan beban listrik prakiraan dengan aktual *(realtime)*.

b. Prakiraan jangka menengah *(mid term forecasting)*, yaitu prakiraan yang dilakukan untuk penyusunan hasil prakiraan yang jangka waktunya mingguan hingga bulanan. Biasa digunakan untuk mempersiapkan jadwal persiapan dan operasional sisi pembangkit.

c. Prakiraan jangka panjang *(long term forecasting)*, yaitu prakiraan yang dilakukan untuk penyusunan hasil prakiraan yang jangka waktunya tahunan atau beberapa tahun kedepan. Biasanya dapat digunakan untuk mempersiapkan ketersediaan unit pembangkitan, sistem transmisi, serta distribusi.

3. Dilihat dari sifat prakiraan yang telah disusun

a. Prakiraan *kualitatif*, yaitu prakiraan yang didasarkan atas kualitatif pada masa lalu. Hasil prakiraan yang dibuat sangat tergantung pada orang yang menyusunnya. Hal ini penting karena hasil prakiraan tersebut ditentukan berdasarkan pemikiran yang berfsifat intuisi, *judgement* atau pendapat dan pengetahuan serta pengalaman dari penyusunnya

b. Prakiraan *kuantitatif*, yaitu prakiraan yang didasarkan atas data kuantitatif pada masa lalu. Hasil prakiraan yang dibuat sangat tergantung pada metode yang digunakan dalam prakiraan tersebut. Dengan metode yang berbeda akan diperoleh hasil prakiraan yang berbeda, adapun yang perlu diperhatikan dari penggunaan metode tersebut, adalah baik tidaknya metode yang digunakan, sangat ditentukan oleh perbedaan atau penyimpangan antara hasil prakiraan dengan kenyataan yang terjadi. Metode yang baik adalah metode yang memberikan nilai-nilai perbedaan atau penyimpangan yang mungkin. Prakiraan kuantitatif hanya dapat digunakan apabila; adanya informasi tentang keadaan lain, informasi tersebut dapat dituliskan dalam bentuk data, dan dapat diasumsikan bahwa pola yang lalu akan berkelanjutan pada masa yang akan datang.

2.2.3 Berdasarkan Pola

Model *time series* adalah pendugaan masa depan dilakukan berdasarkan nilai masa lalu dari suatu variable atau kesalahan masa lalu. Tujuan model *time series* seperti itu adalah menemukan pola dalam deret data historis dan mengekstrapolasikan pola tersebut ke masa depan menurut Makridakis, 1995 dalam (Purnomo, 2015).

Ketika sebuah deret waktu digambarkan atau diplot, akan terlihat suatu pola-pola tertentu. Pola-pola tersebut dapat dijelaskan oleh banyaknya kemungkinan hubungan sebab-akibat. Beberapa pola dari data deret waktu adalah sebagai berikut:

1. Pola acak *(random)* atau pola horizontal, dihasilkan oleh banyak pengaruh independen yang menghasilkan pola non-sistematik dan tidak berulang dari beberapa nilai rataan. Pola acak terjadi karena data yang diambil tidak dipengaruhi oleh faktor-faktor khusus sehingga pola menjadi tidak menentu dan tidak dapat diperkirakan secara biasa.
2. Pola tren *(trend)*, peningkatan atau penurunan secara umum dari deret waktu yang terjadi selama beberapa periode tertentu. *Trend*

disebabkan oleh perubahan jangka panjang yang terjadi disekitar faktor-faktor yang mempengaruhi data deret waktu. Pola perkembangan data ini membentuk karakteristik yang mendekati garis *linier*. Gradien yang naik atau turun menunjukkan peningkatan atau pengurangan nilai data sesuai dengan waktu.

3. Pola musiman *(seasonal)*, dihasilkan oleh kejadian yang terjadi secara musiman atau periodik (contoh: iklim, liburan, kebiasaan manusia). Suatu periode musim dapat terjadi tahunan, bulanan, harian dan untuk beberapa aktivitas bahkan setiap jam. Pola ini terbentuk karena adanya pola kebiasaan dari data dalam suatu periode kecil sehingga grafik yang dihasilkan akan serupa jangka waktu tertentu berulang-ulang.
4. Pola siklis, biasanya dihasilkan oleh pengaruh ekspansi ekonomi dan bisnis dan kontraksi (resesi dan depresi). Pengaruh siklis ini sulit diprakirakan karena pengaruhnya berulang tetapi tidak periodik. Pola ini masih terus dikembangkan dan diteliti lebih lanjut pemodelannya sehingga dapat diperoleh hasil yang tepat.

2.3 Stasioneritas

2.3.1 Stasioneritas Data

Suatu data pengamatan dikatakan statsioner apabila proses tidak mengalami perubahan seiring dengan waktu yang berubah, dengan kata lain proses stasioner untuk suatu $\{Z_t\}$, mempunyai : Mean $E(Z_t) = \mu$, $\text{Var}(Z_t) = E(Z_t - \mu)^2 = \sigma^2$ yang konstaan dan kovarian $Cov(Z_t, Z_s)$ yang merupakan fungsi dari perbedaan waktu $|t - s|$ yang dapat ditulis sebagai berikut :

$$Cov\left(Z_{t,}Z_{t+k}\right) = E[(Z_t - \mu)(Z_{t+k} - \mu)] = \mu_k$$

Stasioner merupakan suatu kejadian jika proses pembangkitan yang mendasari duatu deret berkala didasarkan pada nilai tengan konstan dan nilai varians konstan. Dalam suatu data kemungkinan data tersebut tidak stasioner hal ini dikarenakan mean tidak konstan atau variannya tidak konstan sehingga untuk menghilangkan ketidakstasioneran terhadap mean, maka data tersebut dapat dibuat lebih mendekati stasioner dengan cara melakukan penggunaan metode pembedaan atau *differencing*. Perilaku data yang stasioner anatara lain tidak tidak mempunyai variansi yang terlalu bersar dan mempunyai kecenderungan untuk mendekati nilai rata-ratanya, dan sebaliknya untuk data yang tidak stasioner. Dan secara visual konsep stasioneritas data adalah :

1. Apabila plot data runtun waktu tidak memperlihatkan perubahan nilai tengah dari waktu ke waktu, maka dikatakan stasioner pada nilai mean.
2. Apabila runtun waktu tidak memperhatikan adanya perubahan varians yang jelas dari waktu ke waktu, maka dikatakan stasioner pada variansnya.
3. Apabila dalam plot ACF dan PACF terdapat lag yang keluar dari batas stansar residual atau menurun cepat secara eksponensial, dikatakan data runtun waktu tersebut stasioner.

2.4 *Wavelet*

Gelombang (*wave*) didefinisikan sebagai fungsi osilaso atas waktu atau periodik. *Wave* biasanya dipergunakan dalam bidang fisika, perluasan sinyal dan sebagainya. *Wavelet* diartikan suatu gelombang kecil (*small wave*) yang mempunyai kemampuan mengelompokan energi dan terkonsentrasi dalam waktu tertentu serta naik dan turun pada periode tertentu.

Wavelet merupakan fungsi dekomposisi dari *Wavelet* Ayah dan *Wavelet* Ibu yang masing – masing bagian adalah orthogonal. *Wavelet* ayah mempunyai sifat smooth sedangkan *Wavelet* ibu mempunyai sifat detail yang mengakibatkan data dapat dipisahkan dalam komponen yang berbeda. *Wavelet* banyak digunakan di berbagai bidang, seperti pada *signal processing*, kesehatan, kompresi data, analisis numerik, kimia, statistik. Vidakovic, 1999 dalam (Layla, 2016) mengungkapkan penggunaan *Wavelet* di bidang statistik diantaranya adalah sebagai estimator densitas, analisis runtun waktu dan model Bayes. Sedangkan Abramovich, 2000 dalam (Layla, 2016) membahas aplikasi *Wavelet* pada regresi non parametrik. Metode Transformasi berbasis *Wavelet* merupakan salah satu sarana yang dapat digunakan untuk menganalisis (meneliti) sinyal-sinyal non-stasioner.

Dalam beberapa tahun terakhir ini, metode ini telah dibuktikan kegunaannya dan sangat populer di berbagai bidang ilmu. Analisis *Wavelet* dapat digunakan untuk menunjukkan kelakukan sementara (temporal) pada suatu sinyal, misalya dalam bidang geofisika (sinyal seismik), fluida, medik dan lain sebagainya. Metode Transformasi *Wavelet* ini dapat digunakan untuk menapis data atau meningkatkan mutu kualitas data; dapat juga digunakan untuk mendeteksi kejadian-kejadian tertentu serta dapat digunakan untuk pemampatan data. Selain itu Transformasi *Wavelet* juga dapat digunakan untuk analisis sinyal-sinyal non-stasioner (yaitu sinyal yang kandungan frekuensinya bervariasi terhadap waktu), karena berkaitan dengan kemampuannya untuk memisah-misahkan berbagai macam karakteristik pada berbagai skala.

Konsep Transformasi *Wavelet* telah dirumuskan sejak awal 1980-an oleh beberapa ilmuwan seperti Morlet, Grosmann, Daubechies dan lain-lain. Sejak itu *Wavelet* kemudian dikembangkan dalam beberapa area disiplin ilmu atau aplikasi seperti matematika, fisika, pemrosesan citra, analisis numerik, pengolahan data citra dan data geofisika. Transformasi *Wavelet* merupakan transformasi yang terpadu menggunakan kernel terintegrasi yang dinamakan *Wavelet*.

Kelebihan dari analisis sinyal menggunakan *Wavelet* adalah bahwa dapat dipelajarinya karakteristik sinyal secara lokal dan detil, sesuai dengan skala-nya. Sifat ini sangat berguna untuk sinyal-sinyal non-stasioner atau memiliki komponen transien dengan waktu-hidup (*lifetime*) yang pendek atau memiliki karakteristik yang berbeda pada skala-skala yang berbeda atau memiliki singularitas. Sedangkan jawaban untuk pertanyaan yang kedua didasarkan pada cara memandang *Wavelet* sebagai blok pembangun dalam proses penguraian (*decomposition*) atau ekspansi deret. Jadi, suatu penyajian data menggunakan *Wavelet* dilakukan dengan cara ekspansi tak-berhingga dari *Wavelet* yang diulur atau dilated dan digeser atau translated.

Wavelet merupakan fungsi matematik yang membagi-bagi data menjadi beberapa komponen frekuensi yang berbeda-beda, kemudian dilakukan analisis untuk masing-masing komponen menggunakan resolusi yang sesuai dengan skalanya. Kepentingan penggunaan Transformasi *Wavelet* ini berdasarkan fakta bahwa dengan Transformasi *Wavelet* akan diperoleh resolusi waktu dan frekuensi yang jauh lebih baik daripada metode-metode lainnya seperti Transformasi Fourier maupun Transformasi Fourier Waktu Pendek (STFT=*Short Time Fourier Transform*), selain itu analisis data pada kawasan waktu dan frekuensi penting dan harus dilakukan untuk mempelajari perilaku sinyal-sinyal non-stasioner, selain itu juga dapat dilakukan analisis data pada kawasan waktu dan amplitudo serta kawasan frekuensi dan daya (spektrum).

Prinsip dari estimator *wavelet* thresholding, mempertahankan koefisien *wavelet* yang nilainya lebih besar dari suatu nilai threshold tertentu dan mengabaikan koefisien *wavelet* yang kecil. Selanjutnya koefisien yang besar ini digunakan untuk merekonstruksi estimator fungsi yang dicari. Pada estimasi fungsi dengan metode *wavelet* thresholding, tingkat kemulusan estimator ditentukan oleh pemilihan fungsi *wavelet*, level resolusi, fungsi thresholding, dan parameter threshold. Namun yang paling dominan menentukan tingkat kemulusan estimator adalah parameter threshold. Nilai threshold yang kecil memberikan estimasi fungsi yang sangat tidak mulus *(under smooth*), sedangkan nilai threshold yang besar memberikan estimasi yang sangat mulus (*over smooth*).

2.4.1 Fungsi *Wavelet*

Fungsi *wavelet* adalah suatu fungsi matematika yang mempunyai sifat-sifat tertentu diantaranya berosilasi di sekitar nol (seperti fungsi sinus dan cosinus) dan terlokalisasi dalam domain waktu artinya pada saat nilai domain relatif besar, fungsi *wavelet* berharga nol. Sedangkan menurut Percival, 2000 dalam (Wibowo, 2012), *wavelet* adalah fungsi yang memiliki kareakteristik jika di integeralkan $(-\infty,\infty)$ hasilnya nol integral fungsi kuadratnya sama dengan 1 atau dapat didefinisikan :

1. Integral $\psi(.)$ sama dengan nol :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x)dx = 0 \tag{2.4.1}$$

2. Integral $\psi(.)$ kuadrat sama dengan satu :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi^2(x)dx = 1 \tag{2.4.2}$$

Percival, 2000 (dalam Wibowo, 2012)

Ketika nilai fungsi *wavelet* bernilai 0, ini menanggung arti bahwa nilai rata-rata dari *wavelet* dalam domain waktu harus nol,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t)dx = 0 \tag{2.4.3}$$

dan karena itu harus berosilasi sekitar nol. Dengan kata lain, $\psi(t)$ harus bergelombang.

Fungsi *wavelet* dibedakan atas dua jenis, yaitu *wavelet* ayah (ø) dan *wavelet* ibu (ψ) yang mempunyai sifat :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)dx = 1 \text{ dan } \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x)dx = 0 \quad (2.4.4)$$

Dengan dilatasi diadik dan integer, *wavelet* ayah dan *wavelet* ibu melahirkan keluarga *wavelet* yaitu :

$$\phi_{j,k}(x) = (p2^{j})^{-½}\phi(p2^{-j}x - k) \quad (2.4.5)$$

dan

$$\psi_{j,k}(x) = (p2^{-j})^{½}\psi(p2^{-j}x - k), \quad (2.4.6)$$

$$j = j_0, j_{i,\dots,} j_{k\,,} k \in Z$$

untuk suatu skalar p > 0, dan tanpa mengurangi keumuman dapat diambil p = 1, sehingga :

$$\phi_{j,k}(x) = (2^{-j/2})\phi(2^{-j}x - k) \quad (2.4.7)$$

dan

$$\psi_{j,k}(x) = 2^{-j/2}\,\psi(2^{-j}x - k). \quad (2.4.8)$$

Jenis keluarga *wavelet* orthogonal diantaranya *Haar*, *Daubechies*, *Coiflets*, *Symlets*, *Discrete Meyer*, dan *Morlet* menurut Percival, 2000 dalam (Wibowo, 2012). Contoh *wavelet* yang paling sederhana adalah *Wavelet Haar* yang memiliki rumus:

$$\Psi(x) = \begin{cases} 1 & , \quad 0 \le x < ½ \\ -1 & , \quad ½ \le x < 1 \\ 0 & , \quad x\ yang\ lain \end{cases} \text{ dan } \phi(x) = \begin{cases} 1 & , \quad 0 \le x < 1 \\ 0 & , \quad x\ yang\ lain \end{cases} \quad (2.4.9)$$

Support fungsi keluarga *Wavelet Haar* adalah :

$\psi(2^{-j}x - k) \neq 0$, jika

$0 \le 2^{-j}x - k < 1,$

$k \leq 2^{-j} x < 1 + k,$

$2^j k \leq x < 2^j(1 + k),$

Sehingga $\psi_{j,k} = [k2^j,\ (k+1)2^j]$ (2.4.10)

Beberapa contoh rumus untuk keluarga *Wavelet Haar* diberikan sebagai berikut :

$$\Psi_{0,0}(x) = \begin{cases} 1 & , \ 0 \leq x < ½ \\ -1 & , \ ½ \leq x < 1 \\ 0 & , \ x \ yang \ lain \end{cases}, \quad \Psi_{0,1}(x) = \begin{cases} 1 & , \ 1 \leq x < ½ \\ -1 & , \ 1½ \leq x < 2 \\ 0 & , \ x \ yang \ lain \end{cases} \tag{2.4.11}$$

dan

$$ø_{0,0}(x) = \begin{cases} 1 & ,0 \leq x < 1 \\ 0 & ,x \ yang \ lain \end{cases}, \quad ø_{0,1}(x) = \begin{cases} 1 & , \ 1 \leq x < 2 \\ 0 & , \ x \ yang \ lain \end{cases} \tag{2.4.12}$$

dari keterangan diatas dapat disimpulkan bahwa *Wavelet Haar* memiliki *supprot* kompak tetapi tidak mulus, bahkan tidak kontinu, dan merupakan satu-satunya *wavelet* kompak orthogonal yang simetris.

Dari beberapa contoh rumus diataas diperoleh pasangan *wavelet* yaitu $ø_{0,0}$(x) dan $ø_{0,1}$(x) ; $\psi_{0,0}$(x) dan $\Psi_{0,1}$(x) merupakan *wavelet* yang ortogonal. Karena hasil kali dalamnya adalah nol, dan hasil kali dalam dirinya sendiri adalah 1, sehingga fungsi $ø_{j,k}$(x) dan $\Psi_{j,k}$(x) mempunyai sifat berikut :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_{j,k}(x)\, \psi_{j,k'}(x)\, dx = \delta_{j,k'}\, \delta_{j,j'} \delta_{k,k'} \tag{2.4.13}$$

Setiap fungsi $f \in L^2(R)$dapat didekati dengan kombinasi linier terbatas dari $\psi_{j,k}$.

Definisi 1

Menurut Odgen, 1997 dalam (Wibowo, 2012) sebuah barisan fungsi $\{f_j\}$ dikatakan ortonormal jika f_j merupakan pasangan ortogonal dan $\|f_j\| = 1$ untuk semua j dengan

$$\|f_j\| = \sqrt{f_j, f_g} = \sqrt{\int_a^b f_1(x) f_2(x) dx} \quad (2.4.14)$$

Definisi 2

Definisi $f \in L^2\,[a,b]$ dengan $L^2\,[a,b] = \left\{f : \int_a^b f(x)^2\ dx < \infty\right\}$. Dua fungsi $f_1 f_2 \in L^2\,[a,b]$ dikatakan orthogonal jika $\langle f_1\, f_2 \rangle = 0,$ dengan hasil kali dalam

$$\langle f_1\, f_2 \rangle = \int_a^b f_1\,(x) f_2\,(x)\ dx \quad (2.4.15)$$

Konteks cara kerja *Wavelet* dalam statistik sebagai berikut, misalnya akan dikirimkan suatu sinyak asli dengan fugsi f, sinyal disimpan dulu dalam Y = Af. Kemudian sinyal tersebut diubah ke dalam bentuk $f = A^{-1}Y$. Tetapi dalam kenyataannya, pengiriman sinyal itu akan mendapat gangguan-gangguan (*noise*) seperti angin dan sebagainya. Yaitu $\tilde{Y} = Af + \varepsilon,$ dengan $\varepsilon = noise.$ Perubahannya menjadi $A^{-1}\tilde{Y} = f + A^{-1}\,\varepsilon.$

2.4.2 Transformasi *Wavelet* Diskrit

Dalam analisis data runtun waktu $\{X_t\}$, Transformasi *Wavelet* Diskrit atau *Discrete Wavelet Transform* (DWT) memiliki sifat transformasi ortonormal linier.

Dalam analisis komputasi ada $\{W_n: n = 0,1, \dots \dots, N-1\}$ menyatakan koefisien DWT, dengan notasi $\mathbf{W} = \mathcal{W}\mathbf{X}$, dengan $\mathbf{W}$ adalah vektor kolom dengan panjang$N = 2^J$ dengan elemen ke-n adalah koefisien DWT ke-n pada W_n, dan $\mathcal{W}$ adalah sebuah matriks bernilai riil berukuran NxN. Sifat ortonormalitas menyatakan bahwa $\mathbf{X} = \mathcal{W}^T\mathbf{W}$ dan $\|\mathbf{W}\|^2 = \|\mathbf{X}\|^2$. Oleh karena itu W_N^2 menunjukan besarnya pengaruh perubahan untuk masing-masing koefisien indeks ke-n.

Secara umum untuk data $N = 2^J$, penyusunan elemen $\mathcal{W}$ dari *wavelet* Haar atau keluarga *wavelet* lainnya kurang lebih sebagai berikut. Pada koefisien DWT di level pertama berukuran $\frac{N}{2} \times 1$, untuk level ke-2 ukurannya $\frac{N}{4} \times 1$, sampai di level terakhir diperoleh W_{j0} dan V_{j0} didaptkan koefisien DWT dengan ukuran $\frac{N}{2^{J-1}} \times 1$ sehingga ketika dijumlahkan dari level pertama diperoleh matriks dengan ukuran $\mathrm{N} \times 1$ sebagaimana ukuran data asli. Perubahan koefisien tersebut sebenarnya dihubungkan dengan perubahan pada skala τ_j dengan $\tau_j \equiv 2^{j-1}$ untuk level $j = 1,2, \dots, J$.

DWT dari sebuah deret waktu **X,** dengan panjang *N*, adalah sebuah transformasi linier, dengan pembentukan **W** dari koefisien DWT per-levell, dari perkalian matriks filter atas **X** adalah sebagai berikut :

$$\mathcal{W}\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} \mathcal{W}_1 \\ \mathcal{W}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathcal{W}_J \\ \mathcal{V}_J \end{bmatrix} \boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} \mathcal{W}_1\boldsymbol{X} \\ \mathcal{W}_2\boldsymbol{X} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathcal{W}_J\boldsymbol{X} \\ \mathcal{V}_J\boldsymbol{X} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{W}_1 \\ \mathbf{W}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{W}_\mathrm{J} \\ \mathbf{V}_\mathrm{J} \end{bmatrix} = \mathbf{W} \tag{2.4.16}$$

Percival 2000 (dalam Wibowo 2012)

Wj adalah matriks berukuran $\frac{N}{2^j} \times N$, dan V_J adalah matriks W berukuran $1 \times N$. $\boldsymbol{W_j}$ adalah vektor kolom dengan panjang $N/2^j$ dan $\mathbf{V}_J$ adalah elemen terakhir dari $\mathbf{W}$. $\mathrm{W_j}$ merupakan baris yang tergerser sirkular terhadap baris j yang lainnya berdasarkan sistem periodisasi terhadap perubahan panjang level. Koefisien *wavelet* pada vektor $\mathbf{W_j}$ dihubungkan dengan perbedaan rata-rata yang berdekatan dengan skala $r_j = 2^{j-1}$, dimana koefisien skala pada $\mathbf{V_J}$ sama dengan $\sqrt{N}$ atau setara dengan rata-rata **X.** Ketika $N = 2^j = 8$ maka $J = 3$, sehingga diperoleh :

$W_1^T = [W_0, W_1, W_2, W_3]$

$W_2^T = [W_4, W_5]$

$W_3^T = [W_6]$

$W_3^T = [W_7]$

Misal untuk $\mathrm{N} = 8, \mathrm{W}_1$ adalah matriks berukuran 4×8 dimana barisannya merupakan delapan baris pertama pada W, yaitu :

$$W_1 = [W_{0\bullet}, W_{1\bullet}, W_{2\bullet}, W_{3\bullet},]^T$$

Demikian W_2 adalah matriks 2×8, diperlihatkan sebagai berikut :

$$W_2 = [W_{4\bullet}, W_{5\bullet},]^T$$

Dimana W_3 dan V_3 adalah matriks 1×8 dan 1×8 yang diperlihatkan sebagai berikut :

$$W_3 = [W_{6\bullet}]^T \text{ dan } V_4 = [W_{7\bullet}]^T$$

Mengingat kembali pembangunan wavelte dari **X** yang diindikasikan oleh sifat ortonormalitas $\mathbf{X} = \ O^T\mathbf{O}$, maka diperoleh :

$$\boldsymbol{X} = \ W^{\boldsymbol{T}}\,\mathbf{W} = \sum_{\boldsymbol{n=0}}^{\boldsymbol{N-1}} W_n W_{n\bullet} = \sum_{j=1}^{J} W_j^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{W_j} + V_J^T\boldsymbol{V_J}, \tag{2.4.17}$$

Dari persamaan diatas menyatakan pendefinisian koefisien dari detail

$D_j \equiv \sum_{j=1}^{J} W_j^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{W_j}$ dan $S_J \equiv V_J^T\boldsymbol{V_J}$, makadapat dituliskan:

$$\boldsymbol{X} = \sum_{j=1}^{J} D_j + S_J \tag{2.4.18}$$

Yang menggambarkan analisis multiresolusi (MRA) dari **X,** yaitu mendefinisikan deret **X** sebagai jumlah dari sebuah konstanta vektor S_J dan jumlah koefisienD_J dengan $j = 1,2 \dots, J$.

Ortonormalitas pada W menyatakan bahwa untuk $1 \le j, k \le J$,

$$D_j^T D_k = \boldsymbol{W_j^T} W_j W_k^T W_k = \begin{cases} W_j^{\boldsymbol{T}} V_J, \; k = j \\ 0\,, yang\ lainnya. \end{cases} \tag{2.4.19}$$

2.4.3 Filter *Wavelet*

Proses transformasi *Wavelet* yang melibatkan algoritma piramida, akan mengubah data menjadi dua bagian yang sama besar. Nantinya akan menghasilkan koefisien-koefisien skala dan *Wavelet* yang paling berhubungan. Koefisien-koefisien tersebut diperoleh dari proses pengolahan filter *Wavelet* dan filter skala. Filter *Wavelet* didefinisikan sebagai deret bilanagn riil $\{h_l\colon 1 = 0, \dots, \mathrm{L}-1\}$ dengan L adalah lebar filter yang merupakan bilangan bulat. L adalah lebar filter h_l, maka dipunyai $h_0 \neq 0$ dan $h_{L-1} \neq 0$. Sebuah filter *wavelet* seharusnya memenuhi tiga kondisi dasar berikut :

$\sum_{l=0}^{L-1} h_l = 0$ (2.4.20)

$\sum_{l=0}^{L-1} h_l^2 = 0$ (2.4.21)

$\sum_{l=0}^{L-1} h_l h_{l+2m} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} h_l h_{l+2m} = 0$ (2.4.22)

untuk semua n integer, $h_l = 0$ untuk $l < 0$ dan $l \geq L$ sehingga h_l sebenarnya adalah sebuah deret tak hingga. Filter *wavelet* $\{h_l\}$ digunakan membangun baris $\frac{N}{2}$ pertama dari matriks DWT $\mathcal{W}$ menurut Percival 2000 (dalam Wibowo 2012).

2.4.4 Filter Skala

Dalam pengolahan untuk membangun baris $\frac{N}{2}$ terakhir dari W melalui algoritma piramid, maka harus didefinisikan terlebuh dahulu filter kedua yang akan digunakan untuk membangun matriks V berukuran $\frac{N}{2} xN$. Filter kedua yang dibutuhkan adalah { V_j} yang sesuai dengan {h_l} berikut :

$g_l = (-)^{l+1} h_{L-1-l}$ (2.4.23)

Filter {g_l}dikenal sebagai filter skala, dimana diasumsikan memenuhi kondisi sebagaimana dijelaskan sebelumnya bahwa :

$$\sum_{l=0}^{\mathrm{L}-1} g_l = \sqrt{2}, \sum_{l=0}^{\mathrm{L}-1} g_l^2 = 1, \sum_{l=0}^{\mathrm{L}-1} g_l g_{l+2m} = 0, \mathrm{m} \neq 0 \text{ dan } \sum_{l=0}^{\mathrm{L}-1} g_l h_{l+2m} = 0$$

(2.4.24)

Sifat ortonormalitas dari (h_l}dibutuhkan dalam pementukan W_1, ketika digunakan {g_l} untuk pembentukan V_1 sebenarnya serupa dengan penggunaan {h_l} untuk membentuk W_1 sehingga setiap V_1 ortonormal. Fakta tambahan bahwa filter skala adalah orthogonal untuk filter *wavelet* dan semua pergeseran menyatakan bahwa V_1 dan W_1 adalah orthogonal diekspresikan :

$$V_1 V_1^T = V_1 W_1^T = 0_{\frac{N}{2}}. \tag{2.4.25}$$

Dimana $0_{\frac{N}{2}}$ adalah matrik $\frac{N}{2} \times \frac{N}{2}$, dan seluruhnya bernilai nol. Dipunyai $V_1 W_1^T = I_{\frac{N}{2}}$ dan $V_1 V_1^T = I_{\frac{N}{2}}$ dengan $I_{\frac{N}{2}}$ adalah identitas matrik $\frac{N}{2} \times \frac{N}{2}$, matrik $N \times N$, sehingga :

$$P_1 = \begin{bmatrix} W_1 \\ V_1 \end{bmatrix} \tag{2.4.27}$$

Adalah ortonormal karena :

$$P_1 P_1^T = \begin{bmatrix} W_1 \\ V_1 \end{bmatrix} [W_1^T V_1^T] = \begin{bmatrix} W_1 W_1^T & W_1 V_1^T \\ V_1 W_1^T & V_1 V_1^T \end{bmatrix} = I_N \tag{2.4.28}$$

Karena matriks $\mathcal{W}$ ortonormal dan karena baris $\frac{N}{2}$ pertama dari $\mathcal{W}$ dan P_1 identik, itu diikuti hingga baris $\frac{N}{2}$ terakhir dari P_1 ,yaitu V_1 harus merentang pada sub ruang yang sama sebagaimana baris $\frac{N}{2}$ terakhir dari $\mathcal{W}$. Kecuali pada masalah $\frac{N}{2}$, baris pada V_1 dan baris $\frac{N}{2}$ terakhir dari $\mathcal{W}$ tidak identik, tetapi dapat dimanipulasi V_1 untuk memperoleh baris tersebut menurut Percival dan Walden, 2000 (dalam Wibowo 2012).

2.4.5 Daubechies Wavelet

Wavelet Daubechies adalah salah satu keluarga wavelet dari wavelet orthogonal. Nama Daubechies diambil dari nama belakang penemunya, yakni Inggrid Daubechies. *Wavelet Daubechies* disimbolkan dengan sbN, dengan N adalah angka indeks mulai dari 2 sampai 20.

Menurut Daubechies, 1992 dalam (Layla, 2016), sifat-sifat dari Wavelet Daubechies anatara lain :

Bersifat *ortogonal, biorhogonal dan compactly supported.*

Wavelet Daubechies termasuk dalam keluarga Wavelet orthogonal makan Daubechies juga memiliki sifat orthogonal tersebut. Selain itu, Wavelet Daubechies mempunyai sifat biorthogonal yang artinya Daubechies termasuk dalam kategori *biorthogonal Wavelet.* Dari kedua sifat tersebut Daubechies menggunakan keduanya sebagai fungsi analisis *Wavelet* dan fungsi sistesis *Wavelet.*

Wavelet Daubechies juga memiliki sifat *compactly support* yang berarti *Wavelet Daubechies* mendukung dengan lengkap dalam mengkontruksi peran Wavelet dan mengemasnya dalam bentuk *least assymetric* dan memiliki tahap ekstermal.

Adanya sifat *ortogonal, biorhogonal dan compactly supported* yang dimiliki oleh *Wavelet Daubechies*, menjadi penyokong penggunaannya dalam transformasi Wavelet diskrit dan Wavelet kontinu.

Jumlah *vanishing moment* untuk psi adalah N.

Vanishing moment penting karena jika sebuah Wavelet mempunyai *m vanishing momoent* maka semua koefisien Wavelet dari satu atau beberapa polinomial dengan derajat *m* atau kurang akan sama dengan nol. Indek dalam Daubechies juga menunjukan jumlah dari vaniching moment yang dimiliki yaitu N.

Dalam menganalisa data dengan menggunakan transformasi orthonormal maka Daubechies didukung dengan filter skala (*low-pass*) dan filter wavelet (*high-pass*). Filter skala Daubechies, diberikan $\{g_l : l = 0, \dots, \mathrm{L} - 1\}$ dengan L adalah bilangan bulat positif yang diberikan oleh (Percival, 2000).

$$\mathcal{G}^{(D)}(f) \equiv 2cos^L(\text{ð}f) \sum_{l=0}^{\frac{L}{2}} \binom{\frac{L}{2}-1+l}{l} sin^{2l}(\text{ð}f), \quad (2.4.29)$$

sedangkan untuk filter Wavelet $\{h_l : l = 0, \dots \mathrm{L} - 1\}$ ditunjukan oleh persamaan berikut :

$$\mathcal{H}^{(D)}(f) \equiv 2cos^L(\text{ð}f) \sum_{l=0}^{\frac{L}{2}} \binom{\frac{L}{2}-1+l}{l} sin^{2l}(\text{ð}f), \quad (2.4.30)$$

Filter Wavelet diatas dapat dipresentasikan bentuk lain dengan filter yang berbeda $a_0 = 1, a_1 = -1\}$ dengan $\mathcal{D}(f) = 4sim^L(\text{ð}f)$ menjadi :

$$\mathcal{H}^{(D)}(f) = \mathcal{D}^{\frac{L}{2}}(f) A_l(f), \text{ dengan } A_L(f) \equiv \frac{1}{2^{\mathrm{L}-1}} \sum_{l=\mathrm{I}}^{\frac{L}{2}-1} \binom{\frac{L}{2}-1+1}{l} cos^{2l}(\text{ð}f \quad (2.4.31)$$

Sedangkan untuk fungsi transfer $\{g_l\}$ juga perlu beda, namun hanya dlam fungsi fase yang ditunjukan dalam bentuk polar,

$$G(f) = [\mathcal{G}^{(D)}(f)]^{\frac{1}{2}} e^{i\text{è}(G)(f)}. \quad (2.4.32)$$

Menggunakan fungsi $\mathcal{G}^{(D)}(.)$ dapat diperoleh semua kemungkinan yang ada pada $\{g_l\}$ yang dikenal dengan faktorisasi spektral dan dengan faktorisasi yang berbeda maka akan mendapatkan fungsi fase è(.) yang berbeda menurut Parcival, 2000 (dalam Wibowo, 2012).

2.4.6 Analisis Runtun Waktu Menggunakan *Wavelet* Thresholding

Wavelet Thesholding adalah suatu metode yang menekankan rekontruksi *wavelet* dengan menggunakan sejumlah koefisien terbesar, yakni koefisien yang lebih besar dari suatu nilai tertentu yang diambil, sedangkan koefisien selebihnya diabaikan, karena dianggap nol. Nilai tertentu tersebut dinamakan nilai *threshold* (nilai ambang). Tingkat kemulusan estimasi ditentukan oleh pemulihan fungsi *wavelet*, jenis fungsi thresholding, level resolusi dan parameter *threshold.* Kriteria paling dominan ditentukan parameter *threshold* yang optimal.

2.4.7 Langkah-langkah Thresholding

Skema *thresholding* untuk mengestimasi **D** terdiri dari tiga langkah dasar yaitu:

1. Menghitung koefisien *wavelet* melalui Transformasi *Wavelet* Diskrit (DWT) yaitu $\mathbf{W} \equiv \mathcal{W}\mathbf{X}$.
2. Membentuk koefisien thresholding $\mathbf{W}^{(t)}$, dilakukan sesuia fungsi yang diinginkan (fungsi *soft* atau *hard thresholding*).
3. Mengestimasi **D** melalui $\widehat{D}^{(t)} = \mathcal{W}^T\mathbf{W}^{(t)}$ atau invers dari koefisien DWT yang telah di-thresholding.

2.4.8 Fungsi Thresholding

Ada dua jenis fungsi *thresholding* yaitu :

a. *Hard Thresholding*

Dimana koefisien thresholding $\mathbf{W}^{(t)}$ menjadi $\mathbf{W}^{(ht)}$ dengan elemennya :

$$\boldsymbol{W}_{j,l}^{(ht)} = \begin{cases} W_{j,l}, & \text{jika } |W_{j,l}| > \lambda \\ 0, & W_{j,l} \text{ yang lain} \end{cases} \quad (2.4.33)$$

b. *Soft Thresholding*

Dimana koefisien thresholding $\mathbf{W}^{(t)}$ menjadi $\mathbf{W}^{(st)}$ dengan elemennya :

$$\boldsymbol{W}_{j,l}^{(st)} = sign\{W_{j,l}\}f(|W_{j,l}| - \lambda \quad (2.4.32)$$

dengan

$$\text{Sign } \{W_{j,l}\} = \begin{cases} +1, & \text{jika } W_{j,l} > 0 \\ 0, & \text{jika } W_{j,l} = 0 \\ -1, & \text{jika } W_{j,l} < 0 \end{cases} ; f(x) \begin{cases} x, \text{jika x} \geq 0 \\ 0, \text{jika x} < 0 \end{cases} \quad (2.4.33)$$

λ merupakan parameter thresholding menurut Percivial dan Walden, 2000 (dalam Wibowo,2012).

2.4.9 Pemilihan Parameter Thresholding

Pada estimasi *Wavelet Thresholding*, terdapat dua estimasi. Tingkat kemulusan estimator paling dominan di tentukan oleh parameter threshold λ. Nilai λ terlalu kecil memberikan fungsi yang sangat tidak mulus (*under smooth*) sedangkan jika nilai λ terlalu besar maka akan memberikan estimasi yang sangat mulus (*over smooth*). Parameter yang termasuk dalam estimasi *Wavelet Thresholding* antara lain :

Ada dua kategori dalam pemilihan parameter *threshold* yaitu satu harga threshold untuk seluruh level resolusi (*Global Thresholding*) dan satu thresholding pada tiap level resolusi atau disebut juga *Level-dependent thresholding*. Parameter yang termasuk dalam kategori *Global Thresholding* yaitu :

Minimax threshold sedangkan parameter yang termasuk dalam *Levet-dependen thresholding* adalah *Adaptive threshold*.

1. *Global Thresholding*

   a) *Minimax Threshold*

   Mimimax threshold sebuah threshold yang optimal dapat diperoleh berdasarakan ukuran sampel $N=2^n$ disenut minimax threshold (λ^M). Donoho dan Johnstone (1994) dalam (Fitria, 2018) menabelkan sebagai berikut :

Tabel 2.2 Threshold yang Optimal

N	λ^M	**N**	λ^M
2	0	512	2.074
4	0	1024	2.232
8	0	2048	2.414
16	1.200	4096	2.594
32	1.270	8192	2.773
64	1.474	16384	2.952
128	1.669	32768	3.131

256	1.860	65536	3.310

b) *Universal Threshold* λ^{U}

Merupakan universal lain *Global Thresholding* yang digunakan untuk memilih parameter treshold, Donoho dan Jhonston (1994) menyarankan menggunakan parameter *Universal Threshold*. Jika residual (ε) berdistribusikan normal (IIDN) multivariate dengan mean nol dan kovarian σ^{2JN} atau $\varepsilon \sim N(0, \sigma^{\frac{2}{N}})$. e_t adalah vektor elemen ke-l dari residual ε berdistribusi normal dengan mean nol dan variansi konstanta (σ^2) yaitu :

$e_l \sim NID\ (0, \sigma^2) dan\ cov\ \{e_l, e_l'\} = 0\ ketika\ l\ \neq l's$

Untuk mengecek residual mengikuti proses *white noise* maka dilakukan uji normalitas, uji independensi residual dan uji homogenitas variansi. Uji normalitas dan independensi residual sama seperti pada materi ARIMA dan uji homogenitas variansinya digunakan Uji Korelasi Rank Spearman yaitu :

Uji Hipotesis:

H_0 : Variansi residual konstan

H_1 : Variansi residual tidak konstan

Taraf signifikan : α = 5%

Statistik Uji :

$$r_s = 1\text{-}6\ 1 - 6\left(\frac{\Sigma d^2}{n^3 - n}\right) dan\ t_{hitung} = \frac{r_s\sqrt{N-2}}{\sqrt{1-r_s^2}}$$

Keterangan :

r_s = nilai korelasi Rank Spearman

d = selisih antara ranking X_t dengan ranking nilai mutlak $|e_l|$

n = ukuran sampel

Kriteria Uji : H_0 ditolah jika $t_{hitung} > t_{\alpha,n-2}$ Gujarati,2003 (dalam Wibowo 2012).

Parameter optimal yang disarankan oleh Donoho dan Jhonston yaitu Universal Threshold (λ^U) sebagai berikut :

$$\lambda^U = \sigma\sqrt{2\log(N)}$$

σ harus diestimasi dari data melalui $\hat{\sigma}_{(mad)}$ dan Nadalah ukuran sampel. Odgen (1997) memberikan estimasi σ dengan fungsi Median Deviasi Absolut (MAD) pada koefisien wavelet level pertama (***W₁***) dengan rumus :

$$\hat{\sigma}_{(mad)} = \frac{median\{|W1,l|\}}{0{,}6745}$$

Percival, 2000 (dalam Wibowo, 2012)

2. *Level-Dependent Thresholding*

Level-Dependent Thresholding berarti memilih parameter λ_j bergantung level resolusi j, jadi ada kemungkinan perbedaan nilai threshold λ_j yang dipilih untuk tiap level resolusi. Jika model (..) residual *e* tidak berdistribusi normal multivarite dan *e* merupakan sebuah vektor ke-*l* dari residual diasumsikan tidak berdistribusi *white noise* maka *threshold* optimal yang digunakan adalah *Adaptive Threshold.* Pemilihan theshold ini didasarkan pada prinsip meminimalkan *Stein Unbiased Risk Estimator* (SURE) pada tiap level resolusi. *Adaptive Theshold* untuk himpunan koefisisen detail $W_{j,l}$ yang beranggotakan *L* koefisien didefinisakan sebagai berikut:

$$\lambda^{\wedge} = argmin_{0\leq\lambda\leq\lambda*} SURE\ (W_{j,l;}\lambda)$$

dengan

SURE($W_{j,l}$;λ) $= L - 2.\#\{l: |W_{j,l}| \leq \lambda\} + \sum_{l=1}^{L}(|W_{j,l}|\Lambda\lambda)^2$

Keterangan :

L = jumlah koefisien wavelet

Λ = parameter *threshold*

$W_{j,l}$ = koefisien wavelet

$$\sum_{l=1}^{L}(|W_{j,l}|\Lambda\lambda)^2 = \left\{\sum_{l=1}^{L}(|W_{j,l}|)^2 + L{:}\,1 * \lambda^2\right\}(L{:}\,1 = L, L-1, L-2, \dots, 1)$$

$$\sum_{l=1}^{L}(|W_{j,l}|\Lambda\lambda)^2 = \{0, \sum_{l=1}^{L=1}(|W_{j,l}|)^2, \sum_{l=1}^{L=2}(|W_{j,l}|)^2, \dots, \sum_{l=1}^{L-1}(|W_{j,l}|)^2\}$$

Nason, 2008 (dalam Wibowo,2012)