BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

2.1. Sejarah Teori Antrian

Teori antrian dikembangkan untuk mengetahui model yang memprediksi tingkah laku sistem yang mencoba menyediakan pelayanan untuk kenaikan permintaan secara acak, kemudian masalah paling awal dipelajari ketika terjadi kemacetan antrian telepon. Teori ini ditemukan oleh A.K. Erlang seorang insinyur dari Denmark pada tahun 1909, yang bekerja pada perusahaan telepon di Kopenhagen. A.K. Erlang berhasil mempublikasikan *"The Theory of Probabilities and Telephone Conversations"*. A.K. Erlang juga melakukan eksperimen berkaitan dengan fluktuasi permintaan fasilitas telepon yang berhubungan dengan *automatic dialing equipment,* yaitu peralatan penyambung secara otomatis. Waktu-waktu yang sibuk operator mengalami kewalahan dalam melayani para penelepon secara cepat, sehingga para penelepon mengharuskan antri untuk menunggu giliran yang cukup lama (Lakshmi dan Sivakumar, 2013).

Persoalan yang sebenarnya bahwa A.K. Erlang hanya melakukan perhitungan keterlambatan *(delay)* dari seorang operator, yang kemudian pada tahun 1917 penelitian dilanjutkan untuk menghitung kesibukan beberapa operator. Beliau juga menerbitkan bukunya yang terkenal pada periode ini berjudul *"Solution of some problems in the theory of probabilities of significance in Automatic Telephone Exchange"*. Berakhirnya Perang Dunia II, hasil penelitian A.K. Erlang diperluas lagi penggunaannya antara lain dalam teori antrian (Supranto, 1987).

2.2. Konsep Dasar Teori Antrian

Teori antrian adalah suatu teori yang didalamnya terkait studi matematis dan penungguan. Kata antrian sendiri memiliki arti orang-orang atau barang dalam barisan yang sedang menunggu untuk dilayani atau meliputi bagian perusahaan dapat menentukan waktu dan fasilitas yang sebaik-baiknya agar dapat melayani pelanggan dengan efisien. Suatu proses antrian *(queuing process)* adalah suatu proses yang berhubungan dengan kedatangan seorang pelanggan pada suatu fasilitas pelayanan, kemudian menunggu dalam suatu baris antrian apabila semua pelayannya sibuk, dan akhirnya meninggalkan fasilitas tersebut.

Teori antrian selalu berkaitan dengan seluruh aspek dari situasi pelanggan, didalamnya terdapat sistem antrian mencakup pelanggan yang datang dengan laju konstan atau bervariasi untuk memperoleh suatu layanan (baik jasa maupun barang). Pelanggan yang dapat memasuki fasilitas pelayanan, mereka dapat langsung dilayani namun apabila pelanggan harus menunggu untuk dilayani, mereka akan terbentuk menjadi sebuah antrian, dan akan berada dalam antrian sampai mendapatkan giliran untuk dilayani. Mereka akan dilayani dengan laju pelayanan konstan atau bervariasi. Selesai dilayani, mereka akan meninggalkan sistem (Wati, 2017).

Menurut Kakiay (2004) seperti yang dikutip oleh Arum (2014), sebuah sistem antrian adalah suatu himpunan pelanggan, pelayan, dan suatu aturan yang mengatur pelayanan kepada pelanggan. Sedangkan keadaan sistem menunjuk pada jumlah pelanggan yang berada dalam suatu fasilitas pelayanan, termasuk dalam antriannya. Salah satu populasi adalah jumlah pelanggan yang datang pada fasilitas pelayanan. Besarnya populasi merupakan jumlah pelanggan yang memerlukan pelayanan.

Banyaknya populasi dalam antrian dibedakan menjadi dua, yaitu populasi terbatas *(finite)* dan populasi tidak terbatas *(infinite)*. Populasi yang terbatas terdapat pada suatu perusahaan yang mempunyai sejumlah mesin yang membutuhkan perawatan dan perbaikan pada periode tertentu, sedangkan populasi yang tidak terbatas terdapat pada pelanggan dengan jumlah yang tidak terhingga, misalnya pada suatu supermarket. Setiap hari pelanggan yang datang tidak dapat ditentukan jumlahnya dan dilayani secara random, sehingga disebut populasi yang tidak terbatas (Kakiay, 2004)

Penerapan teori antrian di berbagai bidang dapat meminimumkan dua hal, yaitu biaya langsung oleh penyediaan fasilitas pelayanan dan biaya tidak langsung yang dibebankan kepada pelanggan karena waktu menunggu untuk memperoleh pelayanan. Setiap sistem apabila mempunyai fasilitas pelayanan yang lebih dari jumlah optimal berarti membutuhkan tambahan investasi modal, namun apabila fasilitas pelayanan kurang dari optimal berarti pelayanan akan tertunda.

2.3. Faktor Sistem Antrian

Menurut Kakiay (2004) yang dikutip oleh Ary (2018), faktor-faktor yang berpengaruh terhadap antrian dan pelayanannya adalah sebagai berikut :

1. Distribusi kedatangan
2. Distribusi waktu pelayanan
3. Fasilitas pelayanan
4. Disiplin pelayanan
5. Ukuran sistem antrian
6. Sumber pemanggilan

2.3.1. Distribusi Kedatangan

Pola kedatangan para pelanggan biasanya dicirikan oleh waktu antar kedatangan, yaitu waktu antara kedatangan dua pelanggan yang berurutan pada suatu fasilitas pelayanan. Pola ini dapat bergantung pada jumlah pelanggan yang berada dalam sistem, ataupun tidak bergantung pada keadaan sistem antrian ini (Bronson, 1991; Arum, 2014)

Bentuk kedatangan tidak disebut secara khusus, maka dianggap bahwa pelanggan tiba satu persatu. Asumsinya adalah kedatangan pelanggan mengikuti suatu proses dengan distribusi probabilitas tertentu. Distribusi probabilitas yang sering digunakan adalah distribusi Poisson, dimana kedatangan bersifat bebas, tidak terpengaruh oleh kedatangan sebelum ataupun sesudahnya. Asumsi distribusi Poisson menunjuk bahwa kedatangan pelanggan sifatnya acak dan mempunyai rata-rata kedatangan sebesar *lamda (λ)*, apabila kedatangan individu-individu mengikuti suatu distribusi Poisson, maka waktu antar kedatangan atau *interarival time* (yaitu waktu kedatangan setiap individu) adalah random dan mengikuti suatu distribusi Eksponensial (Kakiay, 2004).

Menurut Kakiay (2004), distribusi kedatangan dibagi menjadi dua, diantaranya :

a. Kedatangan secara individu (tunggal = *single arrivals*)
b. Kedatangan secara kelompok (*bulk arrivals)*

Populasi yang akan dilayani mempunyai perilaku yang berbeda-beda dalam membentuk antrian. Ada tiga jenis perilaku : *reneging, balking, jockeying*. *Reneging* menggambarkan situasi dimana seseorang masuk dalam antrian, namun belum memperoleh pelayanan, kemudian meninggalkan antrian tersebut. *Balking* menggambarkan orang yang tidak masuk dalam antrian dan langsung meninggalkan tempat antrian. *Jockeying* menggambarkan orang yang pindah-pindah antrian (Wihdaniah *et al*, 2018).

2.3.2. Distribusi Waktu Pelayanan

Pola pelayanan biasanya dicirikan oleh waktu pelayanan *(service time)*, yaitu waktu yang dibutuhkan seorang pelayan untuk melayani seorang pelanggan. Waktu pelayanan dapat bersifat deterministik, atau berupa suatu variabel acak yang distribusi probabilitasnya dianggap telah diketahui. Pelayanan dapat dilakukan dengan satu atau lebih fasilitas pelayanan yang masing-masing dapat mempunyai satu atau lebih saluran atau tempat pelayanan yang disebut dengan *servers*. Fasilitas pelayanan lebih maka pelanggan dapat menerima pelayanan melalui suatu urutan tertentu atau fase tertentu, jika idak disebutkan secara khusus, maka anggapan dasarnya adalah bahwa satu pelayan saja dapat melayani secara tuntas urusan seorang pelanggan (Bronson, 1991; Arum, 2014).

Menurut Kakiay (2004) yang dikutip oleh Rachmawati (2013), pola pelayanan berkaitan dengan berapa banyak fasilitas pelayanan yang dapat disediakan. Pola pelayanan terbagi dalam dua komponen penting, yaitu :

a. Pelayanan secara individual *(single service)*
b. Pelayanan secara kelompok *(bulk service)*

Menurut Kakiay (2004) yang dikutip oleh Rachmawati (2013), sistem pelayanan mengikuti kedatangan pelanggan, dapat dinyatakan dengan :

1. Pelayanan tunggal dengan kedatangan tidak terhingga
2. Pelayanan kelompok dengan kedatangan tidak terhingga

3. Pelayanan tunggal dengan kedatangan terbatas
4. Pelayanan kelompok dengan kedatangan terbatas

Pola pelayanan serupa dengan pola kedatangan, dimana pola ini dapat bersifat konstan ataupun acak. Waktu pelayanan konstan, maka waktu yang diperlukan untuk melayani setiap pelanggan adalah sama. Waktu pelayanan *(service time)* adalah lamanya waktu sejak pelayanan diberikan kepada seorang pelanggan sampai selesai pada fasilitas pelayanan. Waktu pelayanan dalam proses antrian dapat juga sesuai dengan salah satu bentuk distribusi probabilitas. Model antrian secara khusus menyebutkan distribusi probabilitas waktu pelayanan bagi setiap server untuk berbagai pelanggan dianggap sama.

Rata-rata pelayanan *(mean server rate)* diberi simbol μ yang mewakili rata-rata banyaknya pelanggan yang dapat dilayani dalam satuan (unit) waktu, sedangkan rata-rata waktu pelayanan *(average service time)* diberi simbol $1/\mu$ yang mewakili rata-rata waktu yang dipergunakan untuk melayani per pelanggan dalam satuan (unit) (Kakiay, 2004; Usman *et al.*, 2019).

2.3.3. Fasilitas Pelayanan

Fasilitas pelayanan berkaitan dengan baris antrian yang akan dibentuk. Menurut Kakiay (2004), fasilitas pelayanan terbagi dalam tiga bentuk, yaitu :

a. Bentuk series, yaitu pelayanan yang berada dalam satu garis lurus ataupun garis melingkar.
b. Bentuk paralel, yaitu pelayanan yang berada dalam beberapa garis lurus dimana antara garis yang satu dengan yang lain berbentuk paralel.
c. Bentuk *network station*, yaitu pelayanan yang dapat didesain secara series dengan pelayanan lebih dari satu pada setiap stasiun. Bentuk ini juga dapat dilakukan secara paralel dengan stasiun yang berbeda-beda.

2.3.4. Disiplin Pelayanan

Fasilitas pelayanan biasanya mempunyai aturan yang digunakan untuk memutuskan pelanggan mana yang akan dipilih dari antrian dalam memulai pelayanan. Aturan pelayanan ini disebut disipilin pelayanan *(service discipline)*. Menurut Kakiay (2004) aturan pelayanan berdasarkan urutan kedatangan dibagi menjadi empat bentuk yaitu :

1. Pertama Masuk Pertama Keluar (FIFO)

   FIFO *(First In First Out)* merupakan suatu peraturan dimana yang dilayani terlebih dahulu adalah pelanggan yang datang paling pertama. FIFO ini sering disebut FCFS *(First Come First Served)*. Contohnya dapat dilihat pada antrian di loket-loket penjualan tiket kereta api.
2. Terakhir Masuk Pertama Keluar (LIFO)

   LIFO *(Last In First Out)* merupakan antrian dimana yang datang paling akhir adalah yang dilayani paling awal atau paling dahulu. LIFO sering juga dikenal dengan LCFS *(Last Come First Served)*. Contohnya pada mesin bongkar muat barang di dalam truk, dimana barang yang terakhir masuk justru yang akan keluar terlebih dahulu.

3. Pelayanan dalam Ukuran Acak (SIRO)

   SIRO *(Service In Random Order)* merupakan pelayanan yang dilakukan secara acak, tidak menjadi persoalan siapa yang datang terlebih dahulu. Disiplin ini dikenal dengan RSS *(Random Selection for Service)*. Contohnya pada arisan, pelayanan dilakukan berdasarkan undian (random).

4. Pelayanan Berdasarkan Prioritas (PS)

   PS *(Prority Service)* merupakan pelayanan yang diberikan kepada mereka yang mempunyai prioritas lebih tinggi dibandingkan dengan yang mempunyai prioritas rendah, meskipun yang memiliki prioritas tinggi ini baru tiba dalam antrian. Kejadian seperti ini disebabkan oleh beberapa hal, misalnya seseorang yang baru mengalami kecelakaan lalu lintas, seseorang yang mempunyai kedudukan tinggi.

2.3.5. Ukuran Sistem Antrian

Menurut Kakiay (2004), ada dua desain yang dapat dipilih untuk menentukan besarnya antrian yang akan memasuki fasilitas pelayanan, yaitu:

1. Ukuran kedatangan secara tidak terbatas *(infinite queue)*

Infinite queue, jumlah pelanggan yang datang ke fasilitas pelayanan tidak dapat diketahui dengan pasti. Contoh pada loket pengambilan obat di Puskesmas, banyaknya resep dokter yang akan datang tidak dapat diketahui jumahnya.

2. Ukuran kedatangan secara terbatas *(finite queue)*

   Finite queue, jumlah pelanggan yang datang ke fasilitas pelayanan dapat diketahui, karena menyesuaikan dengan kapasitas pelayanan yang tersedia. Contohnya jumlah tempat parkir.

2.3.6. Sumber Pemanggilan

Suatu karakteristik yang perlu diketahui dari sumber pemanggilan ini adalah ukurannya (jumlahya), yaitu jumlah total unit yang memerlukan pelayanan dari waktu ke waktu atau disebut jumlah total pelanggan potensial. Ini bisa dianggap terbatas ataupun tidak terbatas (Kakiay, 2004).

2.4. Notasi Model Antrian

Menurut Taha (1996), notasi yang sesuai untuk meringkaskan karakteristik utama dari antrian paralel, secara universal dibakukan dalam format berikut ini :

$$(a/b/c) : (d/e/f)$$

dengan simbol-simbol *a,b,c,d,e, dan f* adalah unsur-unsur dasar dari model ini sebagai berikut :

a = distribusi kedatangan

b = distribusi waktu pelayanan (atau keberangkatan)

c = jumlah pelayan paralel (c = 1,2, ... ∞)

d = peraturan pelayanan (misalnya FCFS, LCFS, SIRO)

e = jumlah maksimum yang diijinkan masuk dalam sistem (dalam antrian + dalam pelayanan)

f = ukuran sumber pemanggilan

Menurut Kakiay (2004), notasi standar ini dapat diganti dengan kode-kode yang sebenarnya dari distribusi-distribusi yang terjadi dan bentuk lainnya, seperti :

M = distribusi kedatangan atau keberangkatan dari proses Poisson atau distribusi tiba dan bertolak dari distribusi eksponensial

D = konstanta atau *deterministik inter arrival* atau *service time* (waktu pelayanan)

c/s = jumlah pelayan dalam bentuk paralel atau seri

N = jumlah maksimum pelanggan *(customer)* dalam sistem

E_d = Distribusi Erlang atau Gamma untuk waktu antar kedatangan atau waktu pelayanan dengan parameter

G = distribusi umum dari *service time* atau keberangkatan *(departure)*

GI = distribusi umum yang indpenden dari proses kedatangan *(Interactive Time)*

GD = *General Discipline* (disiplin umum) dalam antrian

(FCFS, LCFS, SIRO)

NPD = *Non Preempative Discipline*

PD = *Preemptive Discipline*

Veonita *et al.* (2017) menuliskan bahwa model antrian dapat diterapkan pada bidang manajemen operasional sebagai berikut :

1. Model A : M/M/1 *(Single Channel Query System* atau model antrian jalur tunggal)

   (M/M/1) : (GD/∞/∞)

   M = waktu antar kedatangan dan waktu pelayanan mengikuti distribusi Poisson atau Eksponensial

   1 = jumlah pelayan adalah satu

   GD = General Discipline mengikuti FCFS, LCFS, SIRO, PRL

   ∞ = jumlah pelanggan yang dapat masuk dalam sistem dan datang berasal dari populasi yang tak terbatas

2. Model B : M/M/s (*Multiple Channel Query System* atau model antrian berganda)

   (M/M/s) : (GD/∞/∞)

   M = waktu antar kedatangan dan waktu pelayanan mengikuti distribusi Poisson atau Eksponensial

   s = jumlah pelayan adalah lebih dari satu

   GD = General Discipline mengikuti FCFS, LCFS, SIRO, PRL

   ∞ = jumlah pelanggan yang dapat masuk dalam sistem dan datang berasal dari populasi yang tak terbatas

3. Model C : M/G/1 *(General Service* atau waktu pelayanan umum)

   (M/G/1) : (GD/∞/∞)

   M = waktu antar kedatangan mengikuti distribusi Poisson atau Eksponensial

   G = waktu pelayanan mengikuti distribusi *General* atau umum

   1 = jumlah pelayan adalah satu

   GD = General Discipline mengikuti FCFS, LCFS, SIRO, PRL

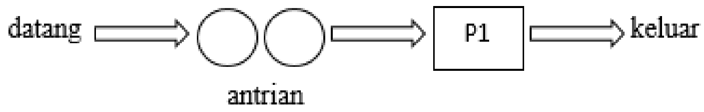
   ∞ = jumlah pelanggan yang dapat masuk dalam sistem dan datang berasal dari populasi yang tak terbatas

2.5. Sistem Antrian

Mulyono dan Kakiay (2004) mengatakan bahwa proses antrian pada umumnya dikelompokkan ke dalam empat struktur dasar menurut sifat-sifat fasilitas pelayanan, yaitu :

a. *Single Channel-Single Phase* atau Satu Antrian Satu Pelayanan

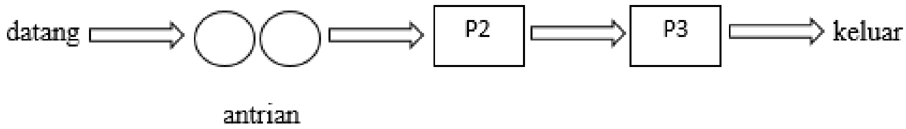
   Sistem ini adalah sistem yang paling sederhana. *Single Channel* berarti hanya ada satu jalur untuk memasuki sistem pelayanan atau ada satu fasilitas pelayanan. *Single Phase* menunjukkan bahwa hanya ada satu fase pelayanan atau hanya ada satu operasi yang dilaksanakan. Contoh seorang pelayan toko, seorang tukang cukur rambut.



Gambar 2.1. Single Channel Single Phase

b. *Single Channel-Multiple Phase* atau Satu Antrian Beberapa Pelayanan Seri

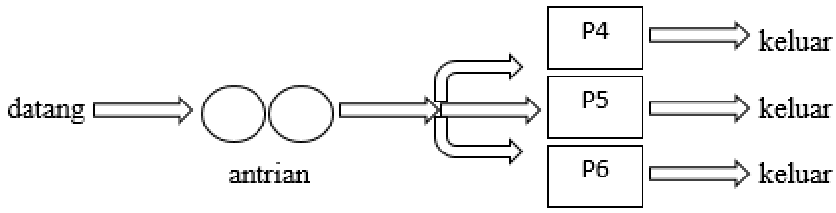
Single Channel-Multiple Phase menunjukkan ada dua atau lebih pelayanan yang dilaksanakan secara berurutan (dalam fase-fase). Contoh pada tempat pencucian mobil, reparasi mobil.



Gambar 2.2. Single Channel Multiple Phase

c. *Multiple Channel-Single Phase* atau Satu Antrian Beberapa Pelayanan *Single*

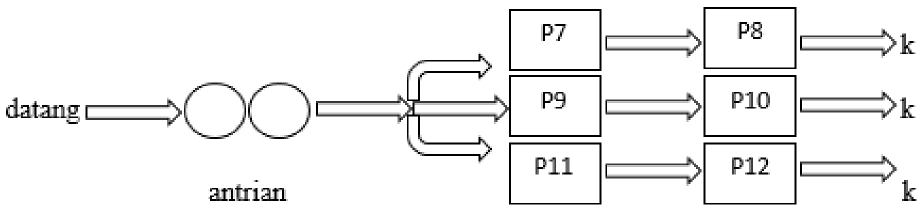
Sistem *Multiple Channel Single Phase* terjadi pada dua atau lebih fasilitas pelayanan dialiri oleh antrian tunggal. Contoh pembelian tiket yang dilayani oleh lebih dari satu loket, pelayanan salon oleh beberapa kapster.



Gambar 2.3. Multiple Channel Single Phase

d. *Multiple Channel-Multiple Phase* atau Banyak Antrian Beberapa Pelayanan Paralel

Setiap sistem ini mempunyai beberapa fasilitas pelayanan pada setiap tahap, sehingga lebih dari satu individu dapat dilayani pada suatu waktu. Sistem antrian ini terlalu kompleks untuk dianalisa dengan teori antrian, lebih sering digunakan simulasi untuk menganalisanya. Contoh pelayanan kepada pasien di rumah sakit dari pendaftaran, diagnosa, penyembuhan sampai pembayaran.



Gambar 2.4. Multiple Channel Multiple Phase

2.6. Ukuran *Steady-State*

Menurut Arum (2014) menuliskan bahwa dimisalkan λ adalah distribusi kedatangan per satuan waktu tertentu dan μ adalah distribusi waktu pelayanan per satuan waktu tertentu, maka ρ atau faktor utilitas didefinisikan sebagai perbandingan antara jumlah rata-rata kedatangan (λ) dengan jumlah rata-rata waktu pelayanan (μ) per satuan waktu, atau dapat dituliskan sebagai :

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

Kondisi *steady-state* terpenuhi apabila distribusi pelanggan yang datang tidak melebihi distribusi pelanggan yang dilayani, dengan kata lain $\lambda < \mu$ atau $\rho < 1$.

Probabilitas *steady-state* dari p_n untuk n pelanggan dalam sistem telah ditentukan, dapat dihitung ukuran-ukuran *steady-state* dari kinerja dari situasi antrian tersebut dngan cara yang sederhana. Ukuran-ukuran kinerja seperti ini lalu dapat dipergunakan untuk menganalisis operasi situasi antrian tersebut untuk maksud pembuatan rekomendasi tentang rancangan sistem tersebut. Ukuran-ukuran kinerja yang terpenting adalah jumlah pelanggan yang menunggu yang diperkirakan, waktu menunggu per pelanggan yang diperkirakan, dan pemanfaatan sarana pelayanan yang diperkirakan, didefinisikan (Taha,1996) sebagai berikut :

Ls = jumlah pelanggan yang diperkirakan dalam sistem

Lq = jumlah pelanggan yang diperkirakan dalam antrian

Ws = waktu menunggu yang diperkirakan dalam sistem

Wq = waktu menunggu yang diperkirakan dalam antrian

dimana rumus umum dari Ls, Lq, Ws, Wq adalah :

$$L_s = \sum_{n=0}^{\infty} np_n \qquad L_q = \sum_{n=c+1}^{\infty} (n-c)p_n$$

$$W_s = \frac{L_s}{\lambda_{eff}} \qquad\qquad W_q = W_s - \frac{1}{\mu}$$

dimana :

p_n = Probabilitas *steady-state* dari *n* pelanggan dalam sistem, sebagai fungsi dari λ_n dan μ_n. Secara umum dapat dihitung dengan rumus :

$$p_n = \frac{\lambda_{n-1}\lambda_{n-2}\ldots\lambda_0}{\mu_n\mu_{n-1}\ldots\mu_1}\, p_0, \quad n = 1, 2, \ldots$$

p_0 = Probabilitas pelayanan kosong / tidak ada antrian

s = Jumlah pelayan dalam sistem.

λ_{eff} = Laju kedatangan rata-rata efektif yang tidak bergantung pada jumlah dalam sistem *n*. Nilai λ_{eff} dapat dihitung dengan rumus :

$$\lambda_{eff} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n p_n$$

Pemanfaatan yang diperkirakan dari sebuah sarana pelayanan didefinisikan sebagai fungsi dari jumlah rata-rata pelayan yang sibuk, karena selisih antara L_s dan L_q harus sama dengan jumlah pelayan yang sibuk, maka diperoleh :

$$\bar{s} = L_s - L_q = \frac{\lambda_{eff}}{\mu}$$

dimana $\bar{s}$ adalah jumlah pelayanan yang sibuk yang diperkirakan.

2.7. Proses Distribusi Poisson dan Distribusi Eksponensial

Menurut Praptono (1986), proses poisson adalah proses cacah yang mempunyai batasan tertentu yaitu diantaranya N(t) mengikuti distribusi poisson dengan rata-rata λt dimana λ suatu konstanta.

Beberapa asumsi untuk proses poisson adalah sebagai berikut (Praptono, 1986):

1. N(t) independen terhadap banyaknya kejadian peristiwa E yang akan terjadi di dalam selang waktu yang lalu artinya N(t) tak bergantung pada pengalaman yang lalu.
2. Homogenitas dalam waktu

   Homogenitas dalam waktu ialah $P_n(t)$ hanya tergantung pada panjang t atau panjang selang waktu atau tidak tergantung dimana selang waktu berada.
3. Regularitas

   Didalam suatu interval kecil (Δt), probabilitas bahwa tepat satu kejadian terjadi adalah $\lambda\Delta t + o(\Delta t)$ dan probabilitas bahwa banyaknya kejadian yang terjadi lebih dari sekali adalah $o(\Delta t)$ dalam interval (Δt).

Menurut Gross dan Haris (1998), pada umumnya model antrian diasumsikan bahwa waktu antar kedatangan dan waktu pelayanan mengikuti distribusi Eksponensial, atau sama dengan rata-rata kedatangan dan rata pelayanannya mengikuti distribusi Poisson.

Teorema 1

Suatu proses Poisson, jumlah kedatangan terjadi pada interval waktu t adalah variabel random yang mengikuti distribusi Poisson dengan rata-rata λt dan probabilitas dari n kedatangan adalah $\frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!}$ (Gross dan Haris, 1998).

Gross dan Haris (1998) menuliskan bukti dari *Teorema 1* sebagai berikut :

Misal $P_n(t)$ adalah kemungkinan dari n kedatangan dalam interval waktu t, dimana n = 0, 1, 2, 3,.... Kemungkinan terjadi n kedatangan dapat dinyatakan dengan mengembangkan persamaan diferensial.

a. n $\geq$ 1:

$$\begin{aligned} P_n(t+\Delta t) = {} & \Pr\{n \text{ kedatangan pada saat } t \text{ ; 0 kedatangan pada saat } \Delta t\} + \\ & \Pr\{n\text{-1 kedatangan pada saat t ; 1 kedatangan pada saat } \Delta t\} + \\ & \Pr\{n\text{-2 kedatangan pada saat t ; 2 kedatangan pada saat } \Delta t\} + \\ & \ldots + \Pr\{0 \text{ kedatangan dalam } t \text{ ; } n \text{ kedatangan pada saat } \Delta t\}. \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} P_n(t+\Delta t) = {} & P_n(t)[1-\lambda\Delta t- o(\Delta t)] + P_{n-1}(t)[\lambda\Delta t + o(\Delta t)] + o(\Delta t) + \\ & P_{n-2}(t)(t)o(\Delta t) + \ldots\ldots + P_0(t)\,o(\Delta t) \end{aligned} \tag{2}$$

di mana $o(\Delta t)$ menyatakan bentuk{n-j kedatangan pada saat t dan j kedatangan pada Δt ; 2$\leq$ j $\leq$ n}.

b. n = 0 didapat :

$P_0(t + \Delta t) = P_0(t)[1-\lambda\Delta t- o(\Delta t)] + o(\Delta t)$

$P_0(t + \Delta t) = P_0(t) - P_0(t)\lambda\Delta t- P_0(t)\, o(\Delta t)] + o(\Delta t)$ (3)

Persamaan (2) dan (3) ditulis kembali dengan menggabungkan semua bentuk yang memuat $o(\Delta t)$, sehingga didapat :

$$P_0(t + \Delta t) - P_0(t) = -\lambda\Delta t P_0(t) + P_0(t)\, o(\Delta t) + o(\Delta t)$$

$$= -\lambda\Delta t P_0(t) + o(\Delta t)$$

(4)

dan $P_n(t + \Delta t) - P_n(t) = -\lambda\Delta t P_n(t) + \lambda\Delta t P_{n-1}(t) + o(\Delta t)$, $(n \geq 1)$.

(5)

Persamaan (4) dan (5) dibagi dengan Δt dan diambil limit $\Delta t \to 0$, sehingga diperoleh:

$$\lim_{\Delta t \to 0}\left[\frac{P_0(t+\Delta t) - P_0(t)}{\Delta t}\right] = \lim_{\Delta t \to 0}\left[\frac{-\lambda(\Delta t)P_0(t)}{\Delta t} + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t}\right] = -\lambda P_0(t) + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t}$$

$$\lim_{\Delta t \to 0}\left[\frac{P_n(t+\Delta t) - P_n(t)}{\Delta t}\right] = \lim_{\Delta t \to 0}\left[\frac{-\lambda(\Delta t)P_n(t)}{\Delta t} + \frac{\lambda(\Delta t)P_{n-1}(t)}{\Delta t} + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t}\right]$$

$$= -\lambda P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t) + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t}, \quad (n \geq 1)$$

karena $\frac{o(\Delta t)}{\Delta t} = 0$ maka:

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda P_0(t) \tag{6}$$

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = -\lambda P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t) \text{, (n} \geq 1) \qquad (7)$$

dari persamaan (6), untuk n = 0 diperoleh :

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda P_0(t)$$

$$\frac{dP_0(t)}{P_0(t)} = -\lambda dt$$

ln P_0 (t) = -λt

P_0 (t) = $e^{-\lambda t}$

dari persamaan (7), untuk n = 1 diperoleh :

$$\frac{dP_1(t)}{dt} = -\lambda P_1(t) + \lambda P_0(t)$$

$$\frac{dP_1(t)}{dt} + \lambda P_1(t) = \lambda P_0(t)$$

$$\frac{dP_1(t)}{dt} + \lambda P_1(t) = \lambda e^{-\lambda t}$$

$$e^{\lambda t}\frac{dP_1(t)}{dt} + \lambda e^{\lambda t} P_1(t) = \lambda$$

$$\frac{d}{dt}(e^{\lambda t} P_1(t)) = \lambda$$

$$P_1(t) = \lambda t e^{-\lambda t} \qquad (8)$$

sehingga dapat diambil suatu rumus umum, yaitu :

$$P_n(t) = \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!} \quad ; \qquad n \geq 0 \tag{9}$$

Bukti persamaan (9) adalah solusi umum dari persamaan dari persamaan (6) dan persamaan (7) dengan menggunakan induksi matematika. Langkah-langkah pembuktian dengan menggunakan induksi matematika sebagai berikut:

1. Persamaan (8) yaitu $P_1(t) = \lambda t e^{-\lambda t}$ membuktikan bahwa persamaan (9) merupakan penyelesaian dari persamaan (7) untuk n = 1.
2. Diasusmsikan persamaan (9) merupakan penyelesaian dari persamaan (7) untuk n = k, persamaan (9) menjadi :

   $$P_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$$

3. akan dibuktikan bahwa persamaan (9) merupakan penyelesaian dari persamaan (7) untuk n = k + 1.

   Untuk n = k + 1, persamaan (7) menjadi :

   Untuk n = k + 1 diperoleh:

   $$\frac{dP_{k+1}(t)}{dt} = -\lambda P_{k+1}(t) + \lambda P_k(t)$$

   $$\frac{dP_{k+1}(t)}{dt} + \lambda P_{k+1}(t) = \lambda P_k(t)$$

   $$\frac{dP_{k+1}(t)}{dt} + \lambda P_{k+1}(t) = \lambda \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$$

$$e^{\lambda t}\,\frac{dP_{k+1}(t)}{dt}+\lambda e^{\lambda t}P_{k+1}(t)=\lambda^{k+1}\,\frac{t^{k}}{k!}$$

$$\frac{d}{dt}(e^{\lambda t}P_{k+1}(t))=\lambda^{k+1}\,\frac{t^{k}}{k!}$$

$$e^{\lambda t}P_{k+1}(t)=\int\lambda^{k+1}\,\frac{t^{k}}{k!}\,dt$$

$$P_{k+1}(t)=\lambda^{k+1}\,\frac{t^{k+1}}{(k+1)k!}\,e^{-\lambda t}$$

$$P_{k+1}(t)=\frac{(\lambda t)^{k+1}}{(k+1)!}\,e^{-\lambda t}$$

Terbukti bahwa peluang dari n kedatangan yang terjadi pada interval waktu t adalah $\frac{(\lambda t)^{n}}{n!}e^{-\lambda t}$, dengan jumlah kedatangan yang terjadi pada interval waktu t adalah variabel random yang mengikuti suatu distribusi Poisson dengan parameter λt.

Teorema 2

Jika proses kedatangan mengikuti proses Poisson dengan parameter λ, maka suatu variabel acak yang menyatakan waktu antar kedatangan berturutan mengikuti distribusi Eksponensial dengan parameter $\frac{1}{\lambda}$ (Gross dan Haris, 1998).

Gross dan Haris (1998) menuliskan bukti dari *Teorema 1* sebagai berikut :

Dimisalkan T adalah suatu variabel acak yang menyatakan waktu antar kedatangan yang berturutan, maka :

$P_n\{T \geq t\} =$ Pn {tidak ada kedatangan dalam waktu t}

$= P_0(t) = e^{-\lambda t}$

kemudian diambil F(t) sebagai fungsi distribusi kumulatif dari T, sehingga diperoleh:

$F(t) = P_n\{T \leq t\}$

$= 1 - e^{-\lambda t},$

maka fungsi densitas $f(t)$ diberikan oleh:

$$f(t) = \frac{dF(t)}{dt} = \lambda e^{-\lambda t}.$$

Ekspektasi dari T adalah :

$$E(T) = \int_0^\infty tf(t)dt$$

$$= \int_0^\infty t\lambda e^{-\lambda t}dt$$

$$= \lambda \int_0^\infty te^{-\lambda t}dt$$

$$= \lambda\left(-\frac{t}{\lambda}e^{-\lambda t}\Big]_0^\infty + \frac{1}{\lambda}\int_0^\infty e^{-\lambda t}dt\right)$$

$$= \lambda\left(0 - \frac{1}{\lambda^2}e^{-\lambda t}\Big]_0^\infty\right)$$

$$= \lambda\left(0 - \left(0 - \frac{1}{\lambda^2}\right)\right) = \lambda\left(\frac{1}{\lambda^2}\right) = \frac{1}{\lambda}$$

Dilihat bahwa jika kedatangan mengikuti proses Poisson dengan parameter λ, maka suatu variabel acak berturutan akan mengikuti distribusi Eksponensial dengan parameter $\frac{1}{\lambda}$. Atau jika rata-rata waktu antar kedatangan adalah $\frac{1}{\lambda}$, maka dapat dilihat bahwa rata-rata kedatangan adalah λ (Gross dan Haris, 1998).

2.8. Uji Kecocokan Distribusi

Uji kecocokan distribusi digunakan untuk menentukan sampai seberapa jauh data sampel yang teramati selaras atau cocok dengan model tertentu yang ditawarkan. Apakah suatu populasi atau variabel acak mempunyai distribusi teoritik tertentu. Uji-uji keselarasan *(goodness of fit)* merupakan uji kecocokan distribusi yang bermanfaat untuk mengevaluasi sampai seberapa jauh suatu model mampu mendekati situasi nyata yang digambarkannya (Daniel, 1989).

Salah satu uji kecocokan distribusi yang dapat digunakan adalah uji Shapiro-Wilk. Berikut prosedur pengujian Shapiro-Wilk :

a. Menentukan hipotesis

   H_0 : Data yang diamati berdistribusi Poisson

   H_1 : Data yang diamati tidak berdistribusi Poisson

b. Menentukan taraf signifikansi

Disini akan digunakan taraf signifikansi dengan $\alpha = 5\%$

c. Menentukan Statistik uji

$D = \sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$; $T_3 = \frac{1}{D}\left[\sum_{i=1}^{k} a_i \, (X_{n-i+1} - X_i\right]^2$

dengan:

D : Coeffisient test Shapiro Wilk

T_3 : Konversi Statistik Shapiro-Wilk Pendekatan Distribusi Normal

d. Kriteria Uji

Tolak H_0 pada taraf signifikansi $\alpha = 5\%$ jika nilai $T_3 < W_{tabel}$ atau p-value < 0,05. Nilai W_{tabel} adalah nilai kritis yang diperoleh dari tabel statistik Shapiro-Wilk.

2.9. Model Antrian A (M/M/1) : (GD/∞/∞)

Menurut Taha (1996), model antrian A (M/M/1) : (GD/∞/∞) adalah model pelayanan tunggal tanpa batas kapasitas baik dari kapasitas sistem maupun kapasitas sumber pemanggilan dengan distribusi kedatangan dan distribusi pelayanan mengikuti distribusi Poisson serta peraturan pelayanan umum. Hal ini diasumsikan bahwa laju kedatangan tidak bergantung pada jumlah dalam sistem tersebut, $\lambda_n = \lambda$ untuk semua n dan pelayanan tunggal dalam sistem tersebut menyelesaikan pelayanan dengan kecepatan konstan, yaitu $\mu_n = \mu$ untuk semua n.

Probabilitas untuk n pelanggan :

$$P_n = \rho^n P_0 \qquad n = 0,1,2,...$$

dengan menggunakan fakta bahwa jumlah semua P_n untuk n = 0,1,2,..., sama dengan 1, diperoleh :

$$P_0 \left(\frac{1}{1-\rho}\right) = 1 \text{ atau } P_0 = 1\text{-}\rho$$

sehingga diperoleh rumus umum berikut ini :

$$P_n = (1\text{-}\rho)\rho^n \quad n = 0,1,2,... \tag{10}$$

Persyaratan untuk model ini adalah $\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1$, berarti bahwa $\lambda < \mu$, yang menyatakan bahwa laju kedatangan harus lebih kecil daripada laju pelayanan agar sistem mencapai stabilitas (kondisi *Steady-State)*, dapat diperoleh ukuran kinerja sebagai berikut :

1. Jumlah pelanggan yang diperkirakan dalam sistem

$$L_s = \sum_{n=0}^{\infty} nP_n = \sum_{n=0}^{\infty} n(1-\rho)\rho^n = (1-\rho)\rho\frac{d}{d\rho}\sum_{n=0}^{\infty}\rho^n = (1-\rho)\rho\frac{d}{d\rho}\left(\frac{1}{1-\rho}\right) = \frac{\rho}{1-\rho}$$

2. Jumlah pelanggan yang diperkirakan dalam antrian

$$L_q = L_s - \rho = \frac{\rho}{1-\rho} - \rho = \frac{\rho^2}{1-\rho}$$

3. Waktu menunggu yang diperkirakan dalam sistem

$$W_s = \frac{L_s}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}\frac{\rho}{1-\rho} = \frac{1}{\mu(1-\rho)}$$

4. Waktu menunggu yang diperkirakan dalam antrian

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{\rho^2}{1-\rho}\frac{1}{\lambda} = \frac{\rho}{\mu(1-\rho)}$$

2.10. Model Antrian B (M/M/s) : (GD/∞/∞)

Menurut Taha (1996), pada model antrian ini pelanggan tiba dengan laju konstan λ dan maksimum s pelanggan dapat dilayani secara bersamaan. Laju pelayanan per pelayan adalah konstan sama dengan μ. Pengaruh dari penggunaan *s* pelayan yang paralel adalah mempercepat laju pelayanan dengan memungkinkan dilakukannya beberapa pelayanan secara bersamaan, jika jumlah pelanggan dalam sistem *n*, sama dengan atau lebih besar dari *s*, laju keberangkatan gabungan dari sarana tersebut adalah *s* μ, tetapi jika n lebih kecil dari *s*, maka laju pelayanan adalah $n\ \mu$. Jadi dalam bentuk model yang digeneralisasi :

$$\lambda_n = \lambda \qquad \text{untuk semua n} \geq 0$$

$$\mu_n = \begin{cases} n\mu & ; n < s \\ s\mu & ; n \geq s \end{cases}$$

Menurut Kakiay (2004), untuk menghitung probabilitas Pn dalam parameter λ, μ, s akan diuraikan dua kasus yaitu populasi n ≤ s dan n > 2.

Populasi n ≤ s, kemungkinan :

a. P_0 dapat muncul pada waktu $(t + \Delta t)$ dengan ketentuan :
   1. Pelanggan menggunakan waktu t dan tidk ada kedatangan, yang berarti $P_0\ (t)(1 - \lambda\Delta t)$
   2. Hanya ada satu pelanggan yang ada pada waktu t, menyelesaikan pelayanannya dn tidak ada kedatangan, berarti $P_1(t)(1 - \lambda\Delta t)(\mu\Delta t)$

   dengan demikian :

$P_0\ (t+\ \Delta t) = P_0(t)(1-\lambda\Delta t) + P_1(t)(1-\lambda\Delta t)(\mu\Delta t)$

dimana $P_0\ (t+\ \Delta t) = P_0\ (t)$

$P_0\ (t) =\ P_0\ (t) - P_0\ (t)\ \lambda\Delta t +\ P_1(t)(\mu\Delta t - \mu\lambda\Delta t^2)$ dimana $\mu\lambda\Delta t^2 = 0$

$P_0\ (t)\ \lambda\Delta t =\ P_1(t)(\mu\Delta t)$

$P_1(t) =\ P_0(t)\left({}^{\lambda}/_{\mu}\right)$ atau $P_1(t) =\ P_0\left({}^{\lambda}/_{\mu}\right)$

b. P_1 dapat muncul dalam sistem pada waktu $(t+\ \Delta t)$ dengan ketentuan :

1. Jumlah nol pada waktu t, tiba dan tidak ada pelayanan
2. Satu unit pada waktu t, tidak ada kedatangan, tidak ada pelayanan
3. Dua unit pada waktu t, tidak ada kedatangan, satu pelayanan

Tiga cara di atas dijumlahkan dan dihilangkan (t) indeksnya, maka akan diperoleh sebagai berikut :

$$P_1 =\ P_0\ (\lambda\Delta t)(1-\mu\Delta t) + P_1(1-\lambda\Delta t)(1-\mu\Delta t) + P_2(1-\lambda\Delta t)(2\mu\Delta t) \quad (11)$$

apabila kedua channel (server) diisi maka probabilitas dari satu channel :

$\mu\Delta t +\ \mu\Delta t = 2\mu\Delta t$ dimana $(\Delta t)^2 = 0,$

maka diperoleh :

$$P_2[2\mu\Delta t - 2\mu\lambda\Delta t^2] =\ P_1 - P_0\ (\lambda\Delta t)(1-\mu\Delta t) - P_1(1-\lambda\Delta t)(1-\mu\Delta t)$$

$$P_2(2\mu\Delta t) =\ P_1 - P_0\ (\lambda\Delta t) + P_0(\lambda\mu\Delta t^2) - P_1(1-\mu\Delta t - \lambda\Delta t + \lambda\mu\Delta t^2)$$

$$= P_1 - P_0\ (\lambda\Delta t) - P_1 + P_1(\mu\Delta t) + P_1\ (\lambda\Delta t)$$

$$= -P_0\ (\lambda\Delta t) + P_1(\mu\Delta t) + P_1\ (\lambda\Delta t)$$

$$= P_1\Delta t(\lambda + \mu) - P_0\ (\lambda\Delta t)$$

$$P_2 = \frac{P_1\Delta t(\lambda + \mu) - P_0\ (\lambda\Delta t)}{(2\mu\Delta t)}$$

$$= \frac{P_1(\lambda + \mu) - P_0\lambda}{2\mu}$$

$$= \frac{P_1(\lambda + \mu) - P_1\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)\lambda}{2\mu} = \frac{P_1(\lambda + \mu) - P_1\mu}{2\mu}$$

$$= \frac{1}{2\mu}P_1\,\lambda = P_1\frac{\lambda}{2\mu}$$

sehingga rumus ini dapat diuraikan untuk probabilitas dalam n kedatangan dan P_n, yaitu dengan merumuskan :

$$P_n = P_{n-1}\left(\frac{\lambda + (n-1)\mu}{n\mu}\right) - P_{n-2}\left(\frac{\lambda}{n\mu}\right) \tag{12}$$

untuk populasi n > 2, kemungkinan P_n muncul dimana n unit di dalam sistem pada waktu $(t + \Delta t)$ dengan ketentuan :

1. n unit pada t, nol kedatangan dan nol pelayanan
2. n+1 unit pada t, nol kedatangan dan satu pelayanan
3. n-1 unit pada t, satu kedatangan dan nol pelayanan

maka :

$$P_n = P_n(1-\lambda\Delta t)(1-2\mu\Delta t) + P_{n+1}(1-\lambda\Delta t)(2\mu\Delta t) + P_{n-1}(\lambda\Delta t)(1-2\mu\Delta t)$$

$$= P_n - P_n(\lambda\Delta t) - P_n(2\mu\Delta t) + P_n\left(2\lambda\mu\Delta t^2\right) + P_{n+1}(2\mu\Delta t) - P_{n+1}\left(2\lambda\mu\Delta t^2\right) +$$

$$P_{n-1}\lambda\Delta t - P_{n-1}2\mu\lambda\Delta t^2$$

$$= P_n - P_n\lambda\Delta t - P_n 2\mu\Delta t + P_{n+1}2\mu\Delta t + P_{n-1}\lambda\Delta t$$

$$= P_n(1 - \lambda\Delta t - 2\mu\Delta t) + P_{n+1}2\mu\Delta t + P_{n-1}\lambda\Delta t$$

$$P_{n+1}(2\mu\Delta t) = P_n - P_n + P_n(\lambda\Delta t + 2\mu\Delta t) - P_{n-1}\lambda\Delta t$$

$$= P_n(\lambda\Delta t + 2\mu\Delta t) - P_{n-1}\lambda\Delta t$$

$$P_{n+1} = \frac{P_n\Delta t(\lambda + 2\mu) - P_{n-1}\lambda\Delta t}{2\mu\Delta t}$$

$$= \frac{P_n(\lambda + 2\mu) - P_{n-1}\lambda}{2\mu}$$

$$P_{n+1} = P_n\left(\frac{\lambda + 2\mu}{2\mu}\right) - P_{n-1}\left(\frac{\lambda}{2\mu}\right) \text{ untuk } n > 2 \tag{13}$$

Rumus ini dapat dikembangkan untuk server sehingga menjadi :

$$P_n = P_{n-1}\left(\frac{\lambda + c\mu}{c\mu}\right) - P_{n-2}\left(\frac{\lambda}{c\mu}\right) \text{ untuk } n \geq s + 1 \tag{14}$$

kemudian persamaan di atas dapat digunakan untuk menyatakan P_n dalam parameter-parameter λ, μ, s dan P_0. Untuk hal ini ada dua hal yang dapat diuraikan :

1. Kasus n < s

Diketahui $P_1 = P_0 \left({}^{\lambda}\!/\!{}_{\mu} \right)$ dan dilihat dari persamaan (12)

$$P_n = P_{n-1}\left(\frac{\lambda + (n-1)\mu}{n\mu}\right) - P_{n-2}\left(\frac{\lambda}{n\mu}\right)$$

$$P_2 = \frac{\lambda+\mu}{2\mu} P_1 - \frac{\lambda}{2\mu} P_0$$

$$= \left(\frac{\lambda+\mu}{2\mu}\right)\frac{\lambda}{\mu} P_0 - \frac{\lambda}{2\mu} P_0 = \frac{\lambda}{2\mu} P_0 \left(\frac{\lambda+\mu}{\mu} - 1\right)$$

$$= \frac{\lambda}{2\mu} P_0 \left(\frac{\lambda+\mu-\mu}{\mu}\right)$$

$$= \frac{\lambda}{2\mu} P_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right) \quad = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 \frac{P_0}{2}$$

dan

$$P_3 = \frac{\lambda+2\mu}{3\mu} P_2 - \frac{\lambda}{3\mu} P_1$$

$$= \left(\frac{\lambda+2\mu}{3\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 \frac{P_0}{2} - \left(\frac{\lambda}{3\mu}\right)\frac{\lambda}{\mu} P_0$$

$$= \left(\frac{\lambda+2\mu}{2\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 \frac{P_0}{3} - \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 \frac{P_0}{3}$$

$$= \frac{P_0}{3}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 \left(\frac{\lambda+2\mu}{2\mu} - 1\right)$$

$$= \frac{P_0}{3}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 \left(\frac{\lambda+2\mu-2\mu}{2\mu}\right) \quad = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 \frac{P_0}{3.2}$$

sehingga diperoleh suatu rumus umum, yaitu :

$$P_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{P_0}{n!}\text{, dimana n = 0,1,2,...,s – 1} \tag{15}$$

2. Kasus n ≥ s

Mencari probabilitas P_n dalam parameter λ, μ, s dan P_0 dengan n ≥ **s** dapat dilihat dari persamaan (14)

$P_n = P_{n-1}\left(\frac{\lambda + s\mu}{s\mu}\right) - P_{n-2}\left(\frac{\lambda}{s\mu}\right)$ dimana n ≥ s+1 dan dari persamaan (12)

yaitu $P_n = P_{n-1}\left(\frac{\lambda + (n-1)\mu}{n\mu}\right) - P_{n-2}\left(\frac{\lambda}{n\mu}\right)$ dimana n = 2,3,4,...,s.

kemudian diuraikan masing-masing untuk :

- n = s

  digunakan persamaan $P_n = P_{n-1}\left(\frac{\lambda + (n-1)\mu}{n\mu}\right) - P_{n-2}\left(\frac{\lambda}{n\mu}\right)$

$$P_n = P_{s-1}\left(\frac{\lambda + (s-1)\mu}{s\mu}\right) - P_{s-2}\left(\frac{\lambda}{s\mu}\right)$$

$$= \left(\frac{\lambda + (s-1)\mu}{s\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{s-1} \frac{P_0}{(s-1)!} - \left(\frac{\lambda}{s\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{s-2} \frac{P_0}{(s-2)!}$$

$$= \frac{P_0}{s(s-2)!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{s-1}\left(\frac{\lambda + (s-1)\mu}{(s-1)\mu} - 1\right)$$

$$= \frac{P_0}{s(s-2)!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{s-1}\left(\frac{\lambda}{(s-1)\mu}\right)$$

$$= \frac{P_0}{s!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{s}$$

- n = s + 1

digunakan persamaan $P_n = P_{n-1}\left(\frac{\lambda + s\mu}{s\mu}\right) - P_{n-2}\left(\frac{\lambda}{s\mu}\right)$

$$P_{s+1} = P_s\left(\frac{\lambda + s\mu}{s\mu}\right) - P_{s-1}\left(\frac{\lambda}{s\mu}\right)$$

$$= \left(\frac{\lambda + s\mu}{s\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s \frac{P_0}{s!} - \left(\frac{\lambda}{s\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{s-1} \frac{P_0}{(s-1)!}$$

$$= \frac{P_0}{s!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s \left(\frac{\lambda + s\mu}{s\mu} - 1\right)$$

$$= \frac{P_0}{s!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s \left(\frac{\lambda}{s\mu}\right)$$

$$= \frac{P_0}{s!\,s}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{s+1}$$

- n = s + 2

$$P_{s+2} = P_{s+1}\left(\frac{\lambda + s\mu}{s\mu}\right) - P_s\left(\frac{\lambda}{s\mu}\right)$$

$$= \left(\frac{\lambda + s\mu}{s\mu}\right)\frac{P_0}{s!\,s}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{s+1} - \left(\frac{\lambda}{s\mu}\right)\frac{P_0}{s!\,s}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s$$

$$= P_0\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{s+1} \frac{1}{s!\,s}\left(\frac{\lambda + s\mu}{s\mu} - 1\right)$$

$$= \frac{P_0}{s!\,s^2}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{s+1} \left(\frac{\lambda}{s\mu}\right)$$

$$= \frac{P_0}{s!\,s^2}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{s+2}$$

sehingga diperoleh rumus umum, yaitu :

$$P_n = \frac{P_0}{s!\,s^{n-s}}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \tag{16}$$

Langkah selanjutnya menentukan P_0 dalam parameter λ, μ, s, dimana dengan menemukan rumus P_0 dan P_n maka akan dikembangkan rumus-rumus lainnya.

1. P_0 dinyatakan dengan :

$$\sum_{n=0}^{s-1}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{P_0}{n!} + \sum_{n=s}^{\infty}\frac{P_0}{s!\,s^{n-s}}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n = 1$$

$$P_0\left\{\sum_{n=0}^{s-1}\frac{\lambda^n}{\mu^n n!} + \sum_{n=s}^{\infty}\frac{\lambda^n}{s!\,s^{n-s}\,\mu^n}\right\} = 1$$

dengan memisalkan $r = \lambda/\mu$ dan $\rho = r/s = \lambda/s\mu$. Kemudian diperoleh :

$$P_0 = \left\{\sum_{n=0}^{s-1}\frac{r^n}{n!} + \sum_{n=s}^{\infty}\frac{r^n}{s!\,s^{n-s}}\right\}^{-1}$$

dengan menyelesaikan deret tak hingga pada rumus di atas, maka :

$$\sum_{n=s}^{\infty}\frac{r^n}{s!\,s^{n-s}} = \frac{r^s}{s!}\sum_{n=s}^{\infty}\left(\frac{r}{s}\right)^{n-s}$$

$$= \frac{r^s}{s!}\sum_{n=s}^{\infty}\left(\frac{r}{s}\right)^{m}$$

$$= \frac{r^s}{s!}\frac{1}{1-r/s} \quad \text{dengan } r/s = \rho < 1$$

sehingga dapat dituliskan kembali :

$$P_0 = \left\{ \sum_{n=0}^{s-1} \frac{r^n}{n!} + \frac{r^s}{s!} \frac{1}{1 - r/s} \right\}^{-1}$$

$$P_0 = \left\{ \sum_{n=0}^{s-1} \frac{(s\rho)^n}{n!} + \frac{(s\rho)^s}{s!(1-\rho)} \right\}^{-1} \tag{17}$$

2. Jumlah rata-rata pelanggan yang diperkirakan dalam antrian

$$L_q = \left(\frac{r^s \rho}{s!(1-\rho)^2} \right) P_0$$

3. Jumlah rata-rata pelanggan yang diperkirakan dalam sistem

$$L_s = L_q + r$$

$$L_s = \left(\frac{r^s \rho}{s!(1-\rho)^2} \right) P_0 + r$$

4. Rata-rata waktu menunggu yang diperkirakan dalam antrian

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \left(\frac{r^s}{s!(s\mu)(1-\rho)^2} \right) P_0$$

5. Rata-rata waktu menunggu yang diperkirakan dalam sistem

$$W_s = \frac{L_s}{\lambda} = W_q + \frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu} + \left(\frac{r^s}{s!(s\mu)(1-\rho)^2} \right) P_0$$

2.11. Gambaran Umum Puskesmas Kedungmundu Semarang

Puskesmas Kedungmundu Semarang merupakan pusat pengembangan kesehatan masyarakat yang berfungsi memberikan pelayanan kesehatan yang menyeluruh dan terpadu kepada masyarakat. Puskesmas ini terletak di Jalan Sambiroto Raya Rt. 01 Rw. 01 Kecamatan Tembalang, Kota Semarang, Jawa

Tengah, kode pos 50276, yang berdiri pada tahun 1976. Puskesmas Kedungmundu memiliki 4 (empat) Puskesmas Pembantu (Putu) yaitu Pustu Sendangguwo, Pustu Sendangmulyo, Pustu Sambiroto, dan Pustu Mangunharjo yang memiliki fasilitas dan peran masyarakat meliputi 90 Posyandu Balita, 44 Posyandu Lansia dengan 465 Kader aktif. Visi dan Misi dari Puskesmas Kedungmundu adalah sebagai berikut :

Visi :

Menjadi puskesmas yang terpercaya dan profesional dalam pelayanan kesehatan masyarakat.

Misi :

1. Memelihara dan meningkatkan pelayanan kesehatan yang bermutu merata dan terjangkau.
2. Meningkatkan profesionalisme SDM dalam bidang kesehatan.
3. Menyediakan sarana prasarana yang memadai.
4. Mendorong kemandirian masyarakat dan keluarga untuk hidup sehat.

Jenis pelayanan Puskesmas Kedungmundu diantaranya BP Umum, BP Gigi, KIA/KB, Imunisasi, Laboratorium, Konsultasi Gizi, Ruang Farmasi/Obat, MTBS yang dibuka untuk umum pada hari Senin-Kamis pukul 07.00-17.00 WIB, Jumat pukul 07.00-15.00 WIB, dan Sabtu pukul 07.00-12.00 WIB. Puskesmas ini dalam melayani masyarakat selalu mengutamakan pelayanan yang prima sesuai dengan slogan mereka "Prima Melayani Sehat Bersama Kami" (Profil Puskesmas Kedungmundu, 2019).