# BAB II

# TINJAUAN PUSTAKA

## 2.1 Indeks Harga Saham Gabungan

Indikator utama yang menggambarkan pergerakan saham yaitu indeks harga saham gabungan (IHSG) dengan memiliki fungsi sebagai indikator tingkat keuntungan, indikator tren pasar, tolak ukur kinerja portofolio serta penentuan strategi pasif dan produk derivatif. Indeks Harga Saham Gabungan (IHSG) adalah indeks yang menggambarkan pergerakan seluruh harga saham yang tercatat di Bursa Efek Indonesia. Menurut Anoraga dan Pakarti (2001) secara umum IHSG merupakan indeks yang menunjukkan pergerakan saham tercatat di bursa efek yang menjadi acuan tentang perkembangan kegiatan di pasar modal.

Naiknya IHSG bukan berarti seluruh jenis saham mengalami kenaikan harga, tetapi hanya sebagian yang mengalami kenaikan sementara sebagian lagi mengalami penurunan. IHSG dihitung oleh Bursa Efek Indonesia yang bekerjasama dengan lembaga seperti indeks kompas 100 yang berisi 100 saham di bursa, LQ 45 yang menghitung indeks untuk seluruh saham yang diperdagangkan di bursa serta 45 saham likuid dan berkapitalisasi perusahaan swasta yang menghitung untuk kepentingan pribadi dan PT Finansial Informasi yang mengitung indeks BUMN dan indeks 50 saham terkecil.

Pada dasarnya, perhitungan IHSG tidak berbeda dengan perhitungan indeks harga saham individual, tetapi dalam hitungan IHSG harus menjumlahkan seluruh harga saham yang ada *(listing).*

Rumus menghitung IHSG (Widoatmodjo, 2009) yaitu :

$$\text{IHSG} = \frac{\text{total harga saham semua pada waktu yang berlaku}}{\text{total harga semua saham pada waktu dasar}} \times 100\%$$

Jika IHSG berada di atas angka 100, maka kondisi dalam keadaan ramai, jika IHSG berada di bawah angka 100, maka pasar dalam keadaan lesu. Bila IHSG tepat angka 100, maka pasar dalam keadaan stabil.

## 2.2 Analisis Runtun Waktu

Analisis runtun waktu merupakan analisis sekumpulan data dalam satu periode waktu lampau yang berguna untuk mengetahui atau meramalkan kondisi di masa mendatang. Dasar pengamatan *time series* adalah pengamatan sekarang ($Z_j$) tergantung pada satu atau beberapa pengamatan sebelumnya ($Z_{t-k}$).

Menurut Makridakis *et all* (1999) bahwa langkah-langkah penting dalam memilih suatu metode runtun waktu yang tepat adalah dengan mempertimbangkan pola data, sehingga metode yang tepat dengan pola data tersebut dapat diuji. Pola data dibedakan menjadi 4 yaitu :

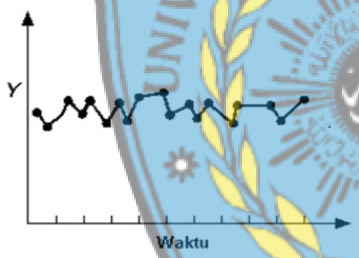
1. Pola Horisontal (H) terjadi jika nilai data berfluktuasi disekitar nilai rata-rata konstan. (deret seperti itu “stasioner” terhadap nilai rata-ratanya).

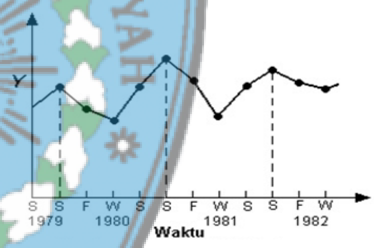
2. Pola Musiman (S) terjadi jika suatu deret dipengaruhi oleh faktor musiman. (misalnya kuartal tahun tertentu, bulanan, atau hari-hari pada minggu tertentu).

3. Pola Siklis (C) terjadi bilamana datanya dipengaruhi oleh fluktuasi ekonomi jangka panjang seperti yang berhubungan dengan siklus bisnis.

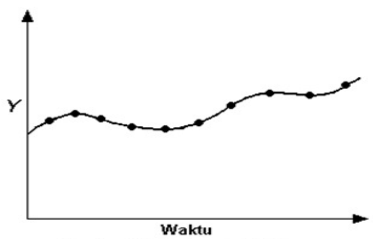
4. Pola Trend (T) terjadi bilamana terdapat kenaikan atau penurunan sekuler jangka panjang dalam data.

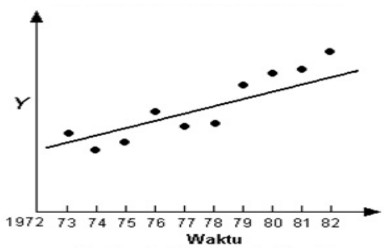
Gambar 2.2 Plot Data




Gambar 1. Pola Data Horisontal Gambar 2. Pola Data Musiman




Gambar 3. Pola Data Siklis Gambar 4. Pola Data Trend

## 2.3 Peramalan

Segala sesuatu dalam kehidupan ini serba tidak pasti, sulit untuk diperkirakan secara tepat. Maka dari itu perlu dilakukan peramalan. Peramalan adalah kegiatan memperkirakan keadaan dimasa yang akan datang melalui pengujian keadaan dimasa lalu. Peramalan yang akan digunakan dapat membantu mengurangi pengaruh ketidakpastian terhadap sebuah masalah. Dengan kata lain peramalan bertujuan mendapatkan peramalan yang bisa meminimumkan kesalahan meramal (*forecast error*) yang biasanya diukur dengan *mean square error, mean absolute error*, dan sebagainya (Makridakis et *all*,1999).

## 2.4 Wavelet

Kata “Wavelet” diberikan oleh Jean Morlet dan Alex Grossman pada awal 1990-an, dan berasal dari bahasa perancis, “ondelette” yang berati gelombang kecil. Kata “onde” yang berati gelombang kemudian diterjemahkan ke bahasa inggris menjadi wave, lalu digabung dengan kata aslinya sehingga terbentuk kata baru “wavelet”. Wavelet diperkenalkan sejak tahun 1980-an hingga awal tahun 1990-an yang populer sebagai literatur untuk analisis gelombang.

Pada tahun 1990-an transformasi wavelet diperkenalkan oleh morlet dan Grossman sebagai fungsi matematis untuk merepresentasikan data atau fungsi sebagai alternatif sebagai transformasi-transformasi matematika untuk menangani masalah resolusi. Sebuah wavelet merupakan gelombang singkat (small wave) yang energinya terkonsentrasi pada suatu selang waktu untuk memberikan kemampuan analisis transien, ketidakstasioneran, atau fenomena berubah terhadap waktu *(time varying).* Karakteristik dari wavelet antara lain adalah bersosialisasi singkat, translasi (pergeseran), dan dilatasi (skala).

Fungsi wavelet adalah suatu fungsi matematika yang mempunyai sifat-sifat tertentu di antaranya berosilasi di sekitar nol (seperti fungsi sinus dan cosinus) dan terlokalisasi dalam domain waktu artinya pada saat nilai domain relatif besar, fungsi wavelet berharga nol (Percival dan Walden, 2000). Fungsi Wavelet mempunyai nilai yang berbeda dari nol dalam interval waktu yang relatif pendek. Fungsi wavelet dibedakan atas dua jenis, yaitu wavelet ayah ($\phi$) dan wavelet ibu ($\psi$) yang mempunyai sifat:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)\, dx = 1 \text{ dan } \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x)\, dx = 0 \qquad (1)$$

Ada beberapa tipe keluarga wavelet, di antaranya wavelet Haar, Daubechies, Symmlets, dan Coiflets. Keluarga wavelet tertua pertama yaitu Wavelet Haar merupakan tipe wavelet paling sederhana yang telah dikembangkan oleh Haar sejak tahun 1910. Wavelet ini merupakan wavelet ortogonal pertama yang mempunyai *support* kompak tetapi tidak mulus, bahkan tidak kontinu, dan merupakan satu-satunya wavelet kompak ortogonal yang simetris. Keluarga wavelet tertua kedua yaitu Wavelet Daubechies ditemukan dan dikembangkan oleh Inggrid Daubechies. Wavelet ini merupakan tipe pertama dari wavelet ortogonal kontinu yang *support*-nya kompak.

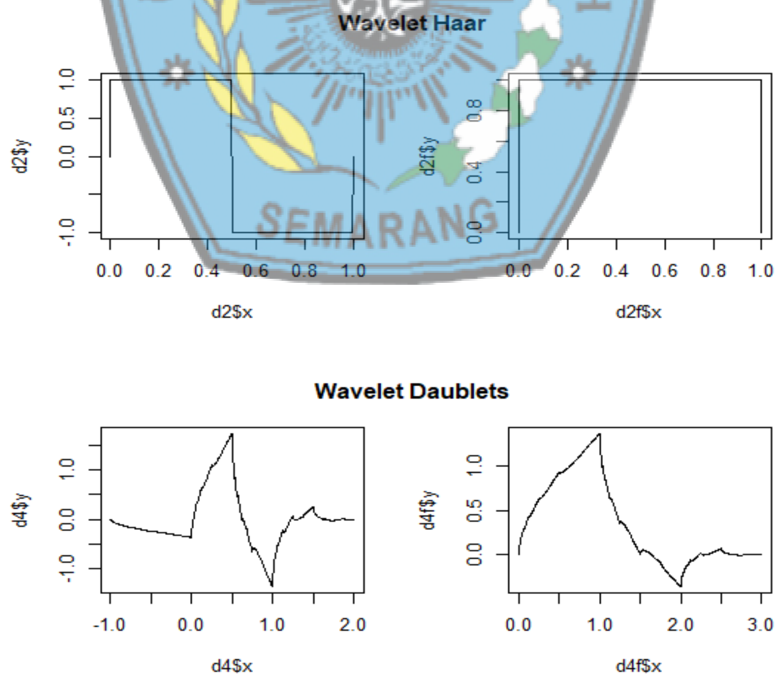
Huruf pertama dari wavelet mengindikasikan nama, yaitu d untuk daublets/daubechies 4. Nomor dari wavelet mengindikasikan panjang *support* (*width*) dan kehalusan (*smoothness*). Wavelet dengan nomor besar seperti d20 relatif lebar dan halus, sedangkan wavelet dengan nomor kecil seperti d4 kurang halus dan lebih sempit.

Berikut tabel dari beberapa jenis wavelet ortogonal yang telah dikenal.

Tabel 2.4 Jenis Wavelet

| **Tipe** | **Nama Wavelet** |
|---|---|
| Haar | “haar” |
| Daublets | “d4” “d6” “d8” “d10” “d12” “d14” “d16” “d18” “d20” |

Berikut adalah contoh wavelet yang meliputi wavelet Haar dan Daublets. Kolom pertama menunjukkan wavelet ibu dan kolom kedua menunjukkan wavelet ayah.




Gambar 2.4 Contoh Wavelet Haar dan Daublets

## 2.5 Transformasi Wavelet

Transformasi Wavelet adalah fungsi transfer (transform) yang digunakan untuk menguraikan data atau fungsi menjadi komponen frekuensi yang berbeda-beda dan kemudian mempelajarinya dengn resolusi yang disesuaikan dengan skalanya. Tujuan utama dari transformasi wavelet adalah mengubah sinyal input menjadi barisan bilangan real yang dikenal dengan koefisien wavelet. Dalam mengimplementasikan transformasi Wavelet menggunakan struktur pohon yang dikenal sebagai algoritma piramida *(pyramid algorithm).* Transformasi Wavelet menggunakan dua komponen penting dalam melakukan transformasi yakni fungsi skala *(scaling function)* dan fungsi wavelet *(wavelet function).* Fungsi skala disebut juga dengan *Lowpass* filter, sedangkan fungsi Wavelet disebut juga sebagai *Highpass* filter. Proses transformasi Wavelet dilakukan dengan mengkonvolusi sinyal dengan data tapis atau dengan proses rata-rata dan pengurangan secara berulang, yang sering disebut dengan metode filter bank. Secara garis besar transformasi Wavelet terbagi menjadi dua, yaitu:

1. *Countinue Wavelet Transform* (CWT) digunakan untuk sebuah fungsi yang berdomain bilangan real atas sumbu x. cara kerja *Countinue Wavelet Transform* (CWT) adalah dengan menghitung konvolusi sebuah sinyal dengan sebuah fungsi wavelet pada setiap waktu dengan setiap skala yang digunakan.
2. *Discrete Wavelet Transform* (DWT) digunakan untuk sebuah fungsi atau domain bilangan bulat (biasanya t = 0, 1, …, N – 1, dimana N dinotasikan sebagai banyaknya nilai dalam runtun waktu).

Dibandingkan dengan CWT, *Discrete Wavelet Transform* (DWT) dianggap relatif lebih mudah pengimplementasiannya. *Discrete Wavelet Transform* (DWT) dapat dibedakan menjadi dua, yaitu (Daubechies, 1992) :

1. *Maximum Overlap Discrete Wavelet Transform* (MODWT).
2. Wavelet Basis Ortonormal

## 2.6 *Maximal Overlap Discrete Wavelet Transform* (MODWT)

Transformasi dengan menggunakan DWT tidak dapat dilakukan jika sampel yang diamati berukuran sembarang yang tidak dapat dinyatakan dalam bentuk $2^j$ dengan j bilangan bulat positif. Sebagai alternatif, penghitungan dapat dilakukan dengan MODWT *(Maximal Overlap Discrete Wavelet Tranform).* Kelebihan MODWT adalah dapat menghilangkan penurunan data sehingga dalam setiap level akan terdapat koefisien wavelet dan skala pada setiap level MODWT (Percival & Walden, 2000). Tujuan MODWT adalah mendefinisikan transformasi untuk menghindari kesensitifan yang dimiliki DWT dalam pemilihan titik awal dalam satuan runtun waktu. Sensitifitas ini adalah *down sampling* dari output filter wavelet dan filter skala pada masing-masing tahap dari algoritma piramida. Dengan mendefinisikan $\tilde{V}$ yang merupakan matriks N x N yang berisikan filter $\tilde{g}$ dan $\widetilde{W}$ adalah matriks N x N yang berisikan filter $\tilde{h}$. Misalnya untuk level pertama didefinisikan $\widetilde{W}_1$ sebagai matriks filter wavelet sehingga didapat :

$$\begin{bmatrix} \tilde{h}_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{h}_3 & \tilde{h}_2 & \tilde{h}_1 \\ \tilde{h}_1 & \tilde{h}_0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{h}_3 & \tilde{h}_2 \\ \tilde{h}_3 & \tilde{h}_1 & \tilde{h}_0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{h}_3 \end{bmatrix}$$

Sedangakan matrik filter skala $\tilde{V}_1$ strukturnya sama dengan $\widetilde{W}_1$ namun $\tilde{h}_l$ diganti dengan $\tilde{g}_l$ . Sehingga langkah pertama dari MODWT dapat dituliskan dalam persamaan berikut:

$$\begin{bmatrix} \widetilde{W}_1 \\ \tilde{V}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \widetilde{W}_1 \\ \tilde{V}_1 \end{bmatrix} X \qquad (2)$$

$\widetilde{w}_1 = \widetilde{w}_1$ X

$\tilde{V}_1 = \tilde{V}_1$ X

**2.6.1 Filter Wavelet dan Filter Skala MODWT**

Filter adalah suatu penapis/penyaring yang bertujuan mendekomposisi atau memecah atau menganalisis data atau sinyal atau fungsi ke dalam komponen proyeksi $(\widetilde{S})$ dan komponen-komponen detrail$(\widetilde{D})$. Filter terbagi menjadi dua yaitu filter wavelet dan filter skala. Masing-masing filter MODWT memiliki lebar $L_j$= ($2^j$-1) (L-1)+1 dan dihasilkan sifat dasar filter skala MODWT yaitu

$$\tilde{g}_{1,l} = \tilde{g}_l = (-1)^{l+1}\tilde{h}_{L-1-L} = g_l/\sqrt{2}. \qquad (3)$$

dan sifat dasar filter wavelet MODWT $\tilde{h}_{1,l} = \tilde{h}_l = h_l/\sqrt{2}$. (4)

Syarat filter wavelet harus memenuhi persamaan :

$$\textstyle\sum_{l=0}^{L-1} \tilde{h}_l = 0 \, , \sum_{l=0}^{L-1} \tilde{h}_l^2 = 1/2 \text{ dan } \sum_{l}^{\infty} -\infty \, \tilde{h}_l \tilde{h}_{l+2n} = 0 \qquad (5)$$

Untuk semua bilangan bulat n bukan nol.

Syarat filter skala harus memenuhi persamaan :

$\sum_{l=0}^{L-1} \tilde{g}_l = 1$ , $\sum_{l=0}^{L-1} \tilde{g}\,_l^2 = 1/2$ dan $\sum_{l=0}^{L-1} \tilde{g}_l\, \tilde{g}_{l+2n} = 0$ (6)

Terdapat perhitungan untuk beberapa filter wavelet sebagai berikut :

Tabel 2.6.1 Perhitungan Lebar Filter Wavelet

| level ke-j | lebar filter ($L_j$= ($2^j$-1) (L-1)+1) | |
|---|---|---|
| | Haar (L=2) | Daubechies 4 (L=4) |
| 1 | 2 | 4 |
| 2 | 4 | 10 |
| ... | ... | ... |
| $J_0$ | ($2^{J_0}$-1)+1 | 3($2^{J_0}$-1)+1 |

Wavelet Haar pada level pertama maka j = 1 dan $L_j$ = L = 2. Untuk menghitung filter wavelet Haar dapat dituliskan :

$\sum_{l=0}^{L-1} \tilde{h}_l = 0 \rightarrow \tilde{h}_0 + \tilde{h}_1 = 0, \sum_{l=0}^{L-1} \tilde{h}_1^2 = \frac{1}{2} \rightarrow \tilde{h}_0 + \tilde{h}_1^2 = \frac{1}{2}$ dan

$\sum_{l=0}^{L-1} \tilde{h}_l \tilde{h}_{l+2n} = 0 \rightarrow \tilde{h}_0 \tilde{h}_{2+} \tilde{h}_1 \tilde{h}_3$

Untuk menghitung filter Wavelet Daubechies 4 dapat dituliskan :

$\sum_{l=0}^{L-1} \tilde{h}_l = 0 \rightarrow \tilde{h}_0 + \tilde{h}_1 + \tilde{h}_2 + \tilde{h}_3 = 0, -\tilde{h}_1$

$= -\tilde{h}_0 - \tilde{h}_2 - \tilde{h}_3$

$\sum_{l=0}^{L-1} \tilde{h}_1^2 = \frac{1}{2} \rightarrow \tilde{h}_0^2 + \tilde{h}_1^2 + \tilde{h}_2^2 + \tilde{h}_3^2 = \frac{1}{2}$

$\tilde{h}_0^2 + (-\tilde{h}_0^2 \,\widetilde{-h}_2^2 \widetilde{-h}_3^2)^2 + \tilde{h}_2^2 + \tilde{h}_3^2 = \frac{1}{2}$

Dan $\sum_{l=0}^{L-1} \tilde{h}_l \tilde{h}_{l+2n} = 0 \rightarrow \tilde{h}_0 \tilde{h}_2 + \tilde{h}_1 \tilde{h}_3 + \tilde{h}_2 \tilde{h}_4 + \tilde{h}_3 \tilde{h}_5 = 0$

Untuk menghitung Filter Skala pada Wavelet Haar pada level j=1 dapat dituliskan :

$$\sum_{l=0}^{L-1} \tilde{g}_l = 1 \rightarrow \tilde{g}_0 + \tilde{g}_1 = 1, \sum_{l=0}^{L-1} \tilde{g}_l^2 = \frac{1}{2} \rightarrow \tilde{g}_0^2 + \tilde{g}_l^2 = \frac{1}{2}$$

Dan $\sum_{l=0}^{L-1} \tilde{g}_l \tilde{g}_{l+2n} = 0 \rightarrow \tilde{g}_0 \tilde{g}_2 + \tilde{g}_1 \tilde{g}_3 = 0$

Untuk menghitung Filter Skala pada Wavelet Daubechies 4 dapat dituliskan :

$$\sum_{l=0}^{L-1} \tilde{g}_l = 1 \rightarrow \tilde{g}_0 + \tilde{g}_1 + \tilde{g}_2 + \tilde{g}_3 = 1$$

$$\tilde{g}_0 = 1 - \tilde{g}_1 - \tilde{g}_2 - \tilde{g}_3$$

$$\sum_{l=0}^{L-1} \tilde{g}_l^2 = \frac{1}{2} \rightarrow \tilde{g}_0^2 + \tilde{g}_1^2 + \tilde{g}_2^2 + \tilde{g}_3^2 = \frac{1}{2}$$

$$(1 - \tilde{g}_1 - \tilde{g}_2 - \tilde{g}_3)^2 + \tilde{g}_1^2 + \tilde{g}_2^2 + \tilde{g}_3^2 = \frac{1}{2}$$

Pada MODWT koefisien wavelet pada setiap level selalu sama sehingga lebih sesuai untuk pemodelan pada *time series* dibandingkan dengan DWT. Prediksi data *time series* satu langkah ke depan dimodelkan secara linear berdasarkan koefisien wavelet hasil dekomposisi pada waktu-waktu sebelumnya.

Pada pemodelan wavelet untuk proses ini, Renaud dkk (2003) dan Murtagh dkk (2004) menyusun prosedur penentuan lag-lag yang menjadi variabel input untuk prediksi multiskala autoregresif. Koefisien wavelet (detil) dan koefisien skala hasil transformasi MODWT yang dianggap mempunyai pengaruh untuk prediksi pada waktu t+1 akan berbentuk $w_{j,t-2^j(k-1)}$ dan $c_{j,t-2^J(k-1)}$.

### 2.6.2 Definisi Koefisien MODWT level ke-j

Diketahui bahwa $\widetilde{W}_j$ dan $\tilde{V}_j$ merupakan filter wavelet dan filter skala yang secara berurutan memiliki elemen $\widetilde{W}_{j,t} = \sum_{l=0}^{L-1} \tilde{h}_{j,l}\, X_{t-1 \bmod N}$ dan

$\tilde{V}_{j,t} = \sum_{l=0}^{L-1} \tilde{g}_{j,l}\, X_{t-1 \bmod N}$ , t = 0,1,2, N-1

Fungsi transfer untuk $\tilde{h}_l$ dan $\tilde{g}_l$ dapat dituliskan :

$$\widetilde{H}_j(f)=\widetilde{H}(2^{J-1}f)\prod_{l=0}^{j-2} \tilde{G}(2^1 f) \text{ dan } \tilde{G}_j(f)=\tilde{G}(2^{J-1}f) \qquad (7)$$

### 2.6.3 Algoritma Piramida untuk MODWT

Algoritma piramida digunakan untuk proses komputasi pada level j. Untuk koefisien wavelet $(\widetilde{W}_j)$ maupun skala $(\tilde{V}_j)$. Jika filter sirkulasi $\{\tilde{h}_l = 0, \dots, L-1\}$ dengan panjang $2^{j-1}(L-1)+1$ maka memiliki panjang =

$$\tilde{h}_0, \underbrace{0, \dots, 0,}_{2^{j-1}-1 \text{ zero s}}\ \tilde{h}_1 \qquad \underbrace{0, \dots, 0,}_{2^{j-1}-1 \text{ zero s}} \qquad \dots, \tilde{h}_{L-2}, \qquad \hat{h}_2, \underbrace{0, \dots, 0,}_{2^{j-1}-1 \text{ zero s}} \hat{h}_{L-1}$$

Memiliki fungsi transfer yang didefinisikan $\widetilde{H}(2^{j-1}f)$. Maka diperoleh elemen $\widetilde{W}_{j,t}$ dan $\tilde{V}_{j-1,t}$ dengan rumus :

$$\widetilde{W}_{j,t} = \sum_{l=0}^{L-1} \tilde{h}_l \,, \widetilde{W}_{j-1,\ t-2^{j-1}l \bmod N} \text{ , t = 0,1,2, N-1} \qquad (8)$$

Dengan argument yang sama

$$\tilde{V}_{j,t} = \sum_{l=0}^{L-1} \tilde{g}_l\, \tilde{V}_{j-1\ \ t-2^{j-1}l \bmod N} \text{ , t = 0,1,2, N-1} \qquad (9)$$

Kedua persamaan diatas menjadi dasar algoritma piramida MODWT. Jika ditentukan $\tilde{V}_{0,t}$=$X_t$, maka dua persamaan diatas merupakan hasil koefisien wavelet dan koefisien skala pada level pertama. Invers MODWT dapat dihitung melalui invers dari algoritma piramida yaitu (Percival dan Walden, 2000)

$\tilde{V}_{j-1} \sum_{l=0}^{L-1} h_l \, \widetilde{W}_{j,\ t+2^{j-1}l \bmod N} + \sum_{l=0}^{L-1} \tilde{g}_l \, \tilde{V}_{j,\ t+2^{j-1}l \bmod N}$ , untuk t = 0,1,2, N-1

Kemudian dapat diperoleh algoritma piramida level pertama yang mana menghasilkan persamaan sebagai berikut :

$$\tilde{V}_0, t = \sum_{l=0}^{L-1} h_l \, \widetilde{W}_{1,\ t+2^{j-1}l \bmod N} + \sum_{l=0}^{L-1} \tilde{g}_l \, \tilde{V}_{1,\ t+2^{j-1}l \bmod N}$$

$$= \sum_{l=0}^{L-1} h_l \, \widetilde{W}_{1,t+1\ l \bmod N} + \sum_{l=0}^{L-1} \tilde{g}_l \, \tilde{V}_{1,t+1\ l \bmod N}$$

$$= \sum_{l=0}^{N-1} h_l \, \widetilde{W}_{1,t+1\ l \bmod N} + \sum_{l=0}^{N-1} \tilde{g}_l \, \tilde{V}_{1,t+1\ l \bmod N}$$

$$= \widetilde{W_1}^T \widetilde{W}_j + \widetilde{V_1}^T \tilde{V}_j$$

$$= \widetilde{D}_1 + \tilde{S}_1$$

Jika $\tilde{V}_0$=X, maka persamaan diatas dikenakan secara berulang hingga level ke $J_0$, sehingga notasi matriknya dapat ditulis :

$$X = \sum_{j=1}^{J_0} \widetilde{W}_j^T \widetilde{W}_j + \tilde{V}_{j_0}^T \tilde{V}_{j_0} \qquad (10)$$

$$X = \sum_{j=1}^{J_0} \widetilde{D}_j + \tilde{S}_{j_0}$$

## 2.7 Analisis Runtun Waktu Menggunakan *Wavelet Thresholding*

*Wavelet thresholding* adalah metode yang menekankan rekontruksi wavelet dengan sejumlah koefisien terbesar dimana koefisien lebih besar dari nilai tertentu akan diambil, selebihnya akan diabaikan atau dianggap nol. Nilai tersebut dinamakan nilai *threshold*/nilai ambang. Tingkat kemulusan estimasi ditentukan oleh pemulihan fungsi wavelet, jenis fungsi *thresholding*, level resolusi dan parameter *threshold*. Untuk estimatornya dapat dituliskan :

$$\acute{f}_{\lambda}(\mathrm{u})=\sum_{j=0}^{J-1}\sum_{k=0}^{2^{J}-1} I_{\left\{\left|W_{j,k}^{(n)}\right|>\lambda\right\}}\, W_{j,k}^{(n)}\Psi_{j,k}(\mathrm{u}) \qquad (11)$$

Dari persamaan diatas $\lambda$ merupakan nilai *threshold* dimana $I_A$ merepresentasikan fungsi indikator dari himpunan A. Estimator pada persamaan diatas dapat dianggap sebagai operator *nonlinear* pada vektor koefisien yang menghasilkan vektor $\acute{\theta}$ dari estimasi koefisien. Karena *thresholding* dirancang untuk membedakan antara koefisien wavelet empiris yang masuk dan keluar dari rekontruksi wavelet, sedangkan untuk membuat keputusan faktor yang mempengaruhi estimator yaitu ukuran sampel n dan tingkat *noise* $\sigma^2$, maka setiap koefisien wavelet merupakan calon yang kuat untuk masuk di dalam rekontruksi wavelet jika ukuran sampel besar atau tingkat *noise* kecil. Untuk estimator *thresholding* adalah

$$\acute{\theta}_{j,k}=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\delta\lambda\left(\frac{\sqrt{nw_{j,k}^{(n)}}}{\sigma}\right) \qquad (12)$$

Dengan $\delta\lambda$ adalah fungsi *threhsolding*, dan λ adalah parameter *thresholding.*

## 2.8 Langkah-langkah *Thresholding*

Langkah-langkah *thresholding* sebagai berikut :

1. Memilih fungsi *thresholding*
2. Mengestimasi nilai $\sigma$
3. Memilih parameter *threshold*

Dalam memilih fungsi harus berhati hati dikarenakan jika memilih nilai *threshold* yang cenderung besar akan berakibat *oversmooth*. Jika nilai *threshold* yang dipilih sangat kecil maka akan mengakibatkan *undersmooth.*

## 2.9 Fungsi *Thresholding*

Fungsi *thresholding* terbagi menjadi dua yaitu *hard thresholding* dan *soft thresholding*.

1. *Hard Thresholding* (Thresholding Keras)

Dimana koefisien *thresholding* $\mathbf{W}^{(t)}$ menjadi $\mathbf{W}^{(\mathbf{ht})}$ dengan elemennya:

$$\boldsymbol{W}_{\boldsymbol{j,l}}^{(\boldsymbol{ht})} = \begin{cases} W_{j,l}, & jika\ |W_{j,l}| > \lambda \\ 0, & W_{j,l}\ \ yang\ lain \end{cases} \tag{13}$$

2. *Soft Thresholding* (Thresholding Lunak)

Dimana koefisien *thresholding* $\mathbf{W}^{(\boldsymbol{t})}$ menjadi $\mathbf{W}^{(\mathbf{st})}$ dengan elemennya:

$$\boldsymbol{W}_{\boldsymbol{j,l}}^{(\boldsymbol{st})} = sign\{W_{j.l}\}f(|Wj,l| - \lambda) \tag{14}$$

Dengan

$$Sign\{W_{j,l}\} = \begin{cases} +1 & jika\ W_{j,l} > 0 \\ 0, & jika\ W_{j,l} = 0; \\ -1 & jika\ W_{j,l} < 0 \end{cases} \quad f(x) = \begin{cases} x, & jika\ x \geq 0 \\ 0, & jika\ x < 0 \end{cases}$$

λ merupakan parameter *thresholding* (Percival dan Walden, 2000). Kedua fungsi sering digunakan untuk melakukan proses estimasi *thresholding*. Fungsi *hard thresholding* dikenal karena memiliki diskontinu dalam fungsi *thresholding* sehingga nilai x yang berada di atas $\lambda$ diabaikan. Fungsi *soft thresholding* biasa digunakan karena selalu kontinu, yang artinya nilai x yang berada di atas *threshold* $\lambda$ ikut dimasukkan dalam proses estimasi. Prinsip dalam fungsi *soft thresholding* bahwa setiap *noise* mempengaruhi semua koefisien wavelet.

### 2.10 Estimasi *Thresholding*

*Wavelet thresholding* diberlakukan aturan dimana setidaknya untuk mengestimasi nilai $\sigma$, karena nilai biasanya tidak diketahui. Dimana nilai standart deviasi dari observasi : $X_1, X_2, X_3, \ldots, Y_n$. Dalam mengestimasi nilai $\sigma$, koefisien wavelet $w_{J-i,k}^{(n)}$ memiliki nilai $\theta_{j,k}$ saling berkorespondasi varian $\frac{\sigma}{n}$ dan koefisien independent digunakan wavelet ortogonal. Menurut Donoho dan Jonstone (1995) mengusulkan estimasi $\sigma$ = berdasarkan koefisien wavelet empiris pada level resolusi tertinggi. Karena pada level resolusi tertinggi dari suatu koefisien biasanya terdapat banyak noise. Menurut Odgen (1997), estimasi MAD (Median of Absolute Deviation) untuk mengestimasi nilai $\sigma$ sebagai berikut :

$$\hat{\sigma} = \frac{median(\left|W_{J-1,k}^{(n)} - median\left(W_{J-1,k}^{(n)}\right)\right|)}{0.6745} \tag{15}$$

Dengan $J=\log_2(n)$, karena koefisien $w_{J-1,k}, k=0,2^{J-1}$ mendekati nol, maka dapat digantikan nilai median $\left(W_{J-1,k}^{(n)}\right)$ di atas dengan nol (Odgen, 1997).

### 2.11 Pemilihan Parameter *Thresholding*

Ada dua kategori dalam pemilihan parameter yaitu *global thresholding* dan *level-dependent thresholding*. Parameter yang digunakan dalam kategori *global thresholding* yaitu *minimax threshold* dan *universal threshold*. Sedangkan parameter yang termasuk dalam *level-dependent thresholding* adalah *adaptive threshold.*

1. *Global Thresholding*

*Global thresholding* berarti memilih satu parameter *threshold* yang digunakan untuk seluruh level resolusi. Dalam pemilihan *threshold* yang bergantung pada banyaknya data pengamatan *N*.

a. *Minimax threshold*

Menurut Odgen (1997) sebuah *threshold* optimal yang diperoleh berdasarkan ukuran sampel N disebut Minimax Threshold ($\lambda^M$).. Nilai threshold sesuai ukuran sampel yang ditabelkan oleh Donoho dan Johstone (1994) sebagai berikut :

Tabel 2.11 Nilai Threshold yang optimal pada Minimax Threshold

| N | $\lambda^M$ | N | $\lambda^M$ |
|---|---|---|---|
| 64 | 1.474 | 2048 | 2.414 |
| 128 | 1.169 | 4096 | 2.594 |
| 256 | 1.860 | 8192 | 2.773 |
| 512 | 2.047 | 16384 | 2.952 |
| 1024 | 2.232 | 32768 | 3.131 |

b. *Universal threshold* ($\lambda^U$)

Merupakan universal lain *Global Thresholding* yang digunakan untuk memilih parameter threshold, Donoho dan Jhonston (1994) menyarankan menggunakan parameter *Universal Threshold*. Jika residual (ε) berdistribusi normal (IID) multivariate dengan mean nol dan kovarian $\sigma^{2/N}$ atau $\varepsilon \sim \mathrm{N}\left(0, \sigma^{\frac{2}{N}}\right)$. $e_t$ adalah vektor elemen ke-$l$ dari residual ε berdistribusi normal dengan mean nol dan variansi konstan ($\sigma^2$) yaitu:

$e_l \sim NID(0, \sigma^2)$ dan $cov\{e_l, e_l'\} = 0$ ketika $l \neq l'$, (16)

Untuk mengecek residual mengikuti proses *white noise* maka dilakukan uji normalitas, uji independensi residual dan uji homogenitas variansi. Uji normalitas dan independensi residual sama seperti pada materi ARIMA dan uji homogenitas variansinya digunakan Uji korelasi Pearson yaitu:

Uji Hipotesis:

$H_0$ : variansi residual konstan

$H_1$ : variansi residual tidak konstan

Taraf signifikansi: α = 5%

Statistik Uji:

$$r_{xy} = \frac{n\sum XY - (\sum X)(\sum Y)}{\sqrt{(n\sum(X)^2 - (\sum X)^2)(n\sum(Y)^2 - (\sum Y)^2)}} \text{ dan } t_{hitung} = \frac{r_{xy}\sqrt{N-2}}{\sqrt{1-r_s^2}}$$

keterangan:

$r_{xy}$ = Nilai korelasi pearson

n = ukuran sampel

X = skor variabel X

Y = skor variabel Y (Arikunto 1997)

jika residual (ε) dari hasil estimasi berdistribusi *white noise*, maka Donoho dan Jhonston dalam buku Percival dan Walden menyarankan parameter *Universal threshold* :

$$\lambda^{U} = \sigma\sqrt{2\log(N)}, \quad (16)$$

$\sigma$ harus diestimasi dari data melalui fungsi Median Deviasi Absolut.

2. *Level-dependent Thresholding*

Menurut Nason (2008), threshold yang bergantung pada resolusi memiliki arti bahwa dalam memilih parameter $\lambda$j bergantung pada level resolusi j. Pemilihan threshold ini dengan prinsip untuk meminimalkan *Stein Unbiased Risk Estimator* (SURE) pada suatu level resolusi. Dikenal sebagai parameter Adaptive threshold untuk himpunan koefisien detail $w_{1,l}$ yang beranggotakan $L$ koefisien didefinisikan sebagai berikut :

$$\lambda^{A} = \arg min_{0\le\lambda\le\lambda^{*}} SURE\left(w_{j,l};\ \lambda\right) \quad (17)$$

Dengan

$$SURE\left(w_{j,l};\ \lambda\right) = L - 2.\#\left\{1: \left|w_{j,l}\right| : \le \lambda\right\} + \sum_{l=1}^{L}(\left|w_{j,l}\right| \wedge \lambda)^{2} \quad (18)$$

Keterangan:

L = jumlah koefesien wavelet

λ = parameter *threshold*

$w_{j,l}$ = koefesien wavelet

\# = untuk setiap

∧ = nilai terkecil

## 2.12 *Mean Square Error*

Parameter *thresholding* yang digunakan yaitu MSE (*Mean Square Error). Mean Square Error* (MSE) digunakan untuk mengukur tingkat keakuratan suatu model peramalan. Nilai ini merepresentasikan rata-rata dari kesalahan *(error)* yang dikuadratkan. Secara matematis nilai MSE didefinisikan sebagai berikut :

$$\text{MSE} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} {e_i}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \hat{x}_i)^2 \qquad (19)$$

dimana $x_i$ merupakan nilai aktual dan $\hat{x}_i$ merupakan nilai prediksi. Semakin kecil nilai MSE yang dihasilkan, semakin baik pula model yang digunakan.