

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Harga Emas

Emas termasuk logam mulia yang memiliki sifat stabil dan merupakan suatu unsur yang mempunyai ketahanan tinggi dalam waktu penyimpanan yang cukup lama. Dahulu emas dijadikan sebagai alat untuk melakukan transaksi pembayaran pada kegiatan ekonomi yang dilakukan oleh suatu negara dengan negara lainnya. Karena peranannya sebagai alat tukar, emas memiliki pengaruh tinggi terhadap perekonomian lokal dan internasional. Dalam pasar internasional, nilai emas dapat berbeda setiap ukurannya. Untuk mengantisipasi hal tersebut maka diperlukan suatu patokan dalam pengukuran nilai emas sehingga dapat mempertahankan stabilitas harga emas tersebut. Penentuan harga emas seluruh dunia ditentukan oleh *London Billion Market Association* (LBMA). LBMA menentukan harga emas setiap dua kali sehari yaitu pukul 10.30 (*Gold A.M*) dan pukul 15.00 (*Gold P.M*) dengan mata uang yang berupa Dollar Amerika Serikat per troy ounce. Harga yang digunakan sebagai patokan harga emas seluruh negara di dunia yaitu harga *Gold P.M* (LBMA, 2015).

2.2 Analisis Runtun Waktu

Data *time series* merupakan suatu representasi dari realisasi data masa lampau yang digunakan untuk meramalkan masa depan, yang artinya diharapkan data *time*

series dapat memberikan penjelasan kejadian di masa mendatang berdasarkan informasi yang ada pada masa lampau, dalam mewujudkan gambaran penjelasan dibutuhkan suatu model matematik yang merepresentasikan proses terjadinya data *time series* tersebut yang kemudian model tersebut digunakan untuk membuat suatu ramalan tentang masa depan. Menurut Wei (2006) runtun waktu merupakan urutan serangkaian pengamatan yang beruntun. Pengamatan tersebut terjadi pada kurun waktu beberapa periode mendatang. Pengamatan waktu pada analisis runtun waktu dapat dinyatakan dalam bentuk $t(Zt)$ yang bergantung pada satu atau beberapa waktu pengamatan yang telah dilakukan sebelumnya $(Zt-k)$. Salah satu tujuan dari analisis runtun waktu yaitu menganalisis data yang membentuk pola berdasarkan deret waktu dan meramalkannya untuk periode yang akan datang.

2.3 Peramalan

Peramalan (*forecasting*) merupakan proses untuk memperkirakan berapa kebutuhan dimasa yang akan datang yang meliputi kebutuhan dalam ukuran kuantitas, kualitas, waktu dan lokasi yang dibutuhkan dalam rangka memenuhi permintaan barang maupun jasa dengan memperhatikan data atau informasi waktu lampau. Peramalan menjadi hal vital bagi suatu perusahaan dalam pengambilan keputusan yang merupakan perencanaan jangka panjang.

Pada dasarnya, semua metode peramalan memiliki ide yang sama, yaitu menggunakan data historis untuk memperkirakan atau memproyeksikan data di masa yang akan datang. Berdasarkan tekniknya, metode peramalan dapat dikategorikan ke dalam metode kualitatif dan kuantitatif. Peramalan yang dibuat

selalu diupayakan agar dapat meminimumkan pengaruh ketidakpastian terhadap sebuah permasalahan. Dengan kata lain peramalan bertujuan mendapatkan suatu ramalan yang bisa meminimumkan kesalahan meramal (*forecast error*) yang biasanya diukur dengan *Mean Square Error* (MSE), *Mean Absolute Error* (MAE), *Mean Absolute Percentage Error* (MAPE), dan sebagainya (Djarwanto dan Subagyo, 2002). Kegunaan peramalan terlihat pada saat pengambilan keputusan. Keputusan yang baik adalah keputusan yang didasarkan atas pertimbangan-pertimbangan yang akan terjadi pada waktu keputusan itu dilaksanakan.

1.4 Single Moving Average (SMA)

Metode peramalan *Single Moving Average* (SMA) merupakan pengembangan dari metode rata-rata yang menggunakan sejumlah data aktual permintaan yang baru untuk membangkitkan nilai ramalan dimasa yang akan datang. Metode ini akan efektif diterapkan apabila kita dapat mengasumsikan permintaan akan tetap stabil sepanjang waktu (Gasperz, 2005). Rata-rata bergerak (*moving average*) untuk periode adalah rata-rata dari k data terbaru, dimana nilai konstan ditentukan di awal ketika melakukan peramalan. Semakin kecil nilai k , berarti semakin besar bobot yang diberikan pada data terbaru, sebaliknya semakin besar nilai k berarti semakin kecil bobot yang diberikan pada data terbaru. Dalam menentukan nilai, nilai yang besar digunakan ketika terdapat fluktuasi yang lebar dan jarang dalam suatu data, sedangkan yang kecil digunakan ketika terdapat pergerakan tiba-tiba pada suatu data, dengan kata lain data cukup berfluktuatif.

Metode ini dapat disimbolkan dengan $MA(k)$ dimana k adalah orde yang digunakan. Metode SMA memerlukan data historis dalam jangka waktu tertentu, dimana semakin Panjang *moving average* akan menghasilkan *moving average* yang semakin halus. Dalam metode SMA, bobot yang sama diberikan pada setiap data yang digunakan dalam perataan. Suatu *moving average* dengan order k , $MA(k)$ adalah nilai k data berurutan seperti berikut (Makridakis dkk, 2003).

$$F_t = \hat{x}_t = \frac{1}{k} \sum_{i=t-k}^t x_i$$

$$F_t = \frac{(x_{t-1} + x_{t-2} + x_{t-3} + \dots + x_{t-k})}{k} \quad (2.1)$$

Maka untuk F_{t+1} ,

$$F_{t+1} = \hat{x}_{t+1} = \frac{1}{k} \sum_{i=t-k+1}^t x_i$$

$$F_{t+1} = \frac{(x_{t-1} + x_{t-2} + x_{t-3} + \dots + x_{t-k})}{k} \quad (2.2)$$

keterangan,

F_t adalah peramalan untuk periode t

F_{t+1} adalah peramalan untuk $t + 1$,

x_i adalah data ke- i

n merupakan jangka waktu atau banyak periode yang dirata-ratakan

k adalah jumlah periode *moving average*.

1.5 Weighted Moving Average (WMA)

WMA merupakan rata-rata bergerak yang diberikan bobot pada masing-masing data (Aritonang, 2002). Metode peramalan *Weighted Moving Average* (WMA) merupakan pengembangan dari metode *moving average* dengan tambahan bobot-bobot dalam perhitungan. WMA atau rata-rata tertimbang adalah rata-rata yang dihitung dengan memberikan nilai-nilai dalam kumpulan data yang lebih dipengaruhi menurut atribut data dimana perhitungan rata-rata dilakukan dengan pemberian bobot. Penetapan bobot bersifat subjektif, tergantung pada pengalaman dan opini analis data, misalnya apakah observasi yang terakhir lebih besar peluang pembobotannya atau sebaliknya.

Apabila peluang pembobotannya lebih besar pada observasi yang terakhir, maka *weighted factor* akan lebih besar pada periode akhir dibandingkan periode awal. Semakin panjang periode yang ditetapkan, maka semakin besar pula pembobotan yang diberikan kepada data yang terbaru. Jumlah peluang pembobotannya adalah sama dengan satu (Eris dkk, 2014). Adapun rumus yang digunakan adalah sebagai berikut :

$$WMA_{t+1} = \frac{kX_t + (k-1)X_{t-1} + \dots + X_{t-(n-1)}}{k + (k-1) + \dots + 1} \quad (2.3)$$

keterangan,

k adalah banyaknya periode atau rentang bilangan peramalan.

X_t adalah nilai data deret waktu pada titik t .

1.6 Exponential Moving Average (EMA)

Pemberian bobot pada *Exponential Moving Average* (EMA) sama halnya seperti pada metode WMA yaitu dengan melibatkan periode atau faktor pembobotan untuk setiap nilai dalam seri data berdasarkan urutan waktunya. Seperti halnya WMA, pada EMA, pembobotan untuk setiap titik data yang lebih lama menurun secara eksponensial, jadi tidak pernah mencapai nol. Persamaan EMA adalah sebagai berikut (Makridakis dkk, 2003).

$$\begin{aligned}
 F_t &= \alpha X_t + (1 - \alpha)F_{t-1} \\
 &= \alpha X_t + (1 - \alpha)[\alpha X_{t-1} + (1 - \alpha)F_{t-2}] \\
 &= \alpha X_t + \alpha(1 - \alpha)X_{t-1} + (1 - \alpha)^2 F_{t-2}
 \end{aligned}
 \tag{2.4}$$

Maka untuk F_{t+1}

$$F_{t+1} = \frac{2}{(k+1)} X_{t-1} + \left[1 - \left[\frac{2}{k+1} \right] \right] F_t
 \tag{2.5}$$

Dengan k merupakan Panjang periode peramalan pada EMA, dimana nilai awal EMA diambil dari nilai MA sederhana. Dengan kata lain, nilai peramalan satu periode ke depan, sama dengan nilai peramalan periode sebelumnya.

1.7 Weighted Exponential Moving Average (WEMA)

Dalam penelitian oleh Hansun (2013), dikenalkan pendekatan baru dari *moving average* dalam analisis runtun waktu dengan menggabungkan faktor pembobotan untuk WMA dan EMA. Pendekatan metode baru ini dikenal sebagai

Weighted Exponential Moving Average (WEMA). Dalam melakukan perhitungan metode WEMA diawali dengan menggunakan rumus WMA untuk mendapatkan nilai prediksi baru untuk data titik waktu tertentu dengan melakukan inisialisasi sebagai nilai dasar yang dapat disimbolkan dengan (H_t). Kemudian, nilai baru akan digunakan sebagai nilai dasar untuk menghitung dengan faktor pembobotan EMA.

1. Menghitung nilai dasar (H_t) dengan menggunakan persamaan WMA pada (2.3) untuk dapat data dan periode waktu tertentu.
2. Dengan menggunakan nilai dasar yang diperoleh, selanjutnya menghitung nilai peramalan dengan mengadopsi persamaan dari metode EMA seperti berikut:

$$WEMA_{t+1} = \alpha X_t + (1 - \alpha)H_t \quad (2.6)$$

Keterangan,

X_t adalah nilai pada periode waktu,

H_t adalah nilai dasar untuk jangka waktu t dan,

α adalah nilai parameter dimana dalam persamaan (2.5)

2.8 Single Exponential Smoothing (SES)

Metode pemulusan yang paling sederhana adalah *Single Exponential Smoothing* (SES), dimana hanya terdapat satu parameter yang perlu dietimasi. Metode ini memberikan bobot *Exponential Moving Average* (EMA) untuk semua data historis. Metode ini tepat digunakan untuk data yang tidak mengandung *trend* ekstrim dan biasanya untuk peramalan satu periode kedepan. Tujuannya adalah

untuk mengestimasi level terkini dan menggunakannya untuk peramalan nilai ke depan. Persamaan SES dapat dituliskan sebagai berikut (Makridakis dkk, 2003).

$$F_{t+1} = \alpha X_t + (1 - \alpha)F_t \quad (2.7)$$

Keterangan,

F_{t+1} merupakan peramalan pada suatu periode berikutnya,

α merupakan konstanta pemulusan,

X_t merupakan data atau observasi ke- t

F_t merupakan data periode ke- t

Peramalan F_{t+1} berdasarkan pada pembobotan pada data terbaru X_t dengan bobot sebesar α , dan pembobot peramalan terkini F_t dengan bobot sebesar $1 - \alpha$. Jika proses substitusi ini berulang dengan mengganti F_{t-1} oleh komponennya F_{t-2} oleh komponennya, dan seterusnya, maka hasilnya adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} F_{t+1} &= \alpha X_t + (1 - \alpha)F_t \\ &= \alpha X_t + (1 - \alpha)[\alpha X_{t-1} + (1 - \alpha)F_{t-1}] \\ &= \alpha X_t + \alpha(1 - \alpha)X_{t-1} + (1 - \alpha)^2 F_{t-1} \\ &= \alpha X_t + \alpha(1 - \alpha)X_{t-1} + \alpha(1 - \alpha)^2 F_{t-2} \quad (2.8) \end{aligned}$$

Oleh karena itu, F_{t+1} adalah pembobotan moving average dari semua data historis.

Ketika t semakin besar, nilai $(1 - \alpha)^t$ akan semakin kecil. Dengan demikian F_t belum diketahui, maka dapat dilakukan *initial value*, untuk data awal yang cukup fluktuatif dapat dilakukan dengan menetapkan peramalan pertama sama dengan data/observasi pertama, $F_1 = y_1$. Kemudian untuk data awal yang cukup konstan atau dalam artian tidak terlalu banyak pergerakan, dapat menggunakan rata-rata dari

lima atau enam data pertama sebagai peramalan pertama $F_1 = MA(5)$ atau $F_1 = MA(6)$ Persamaan exponential smoothing adalah peramalan sebelumnya (F_t) dengan penambahan adjustment untuk galat yang terjadi di peramalan sebelumnya. Besaran nilai α berada diantara 0 dan 1, dalam antrian α tidak boleh sama dengan 0 atau 1. Dalam memilih besaran α , jika menginginkan peramalan yang stabil dengan pemulusan random, maka menggunakan nilai α yang kecil untuk data tidak berfluktuatif, sedangkan jika diinginkan respon yang cepat terhadap perubahan data, maka menggunakan nilai α yang besar untuk data cukup berfluktuatif. Untuk menentukan nilai α yang tepat dalam peramalan salah satunya dapat dilakukan trial and error, yaitu untuk mengestimasi nilai α dengan melakukan percobaan untuk α dengan nilai 0.1, 0.2, 0.3, ..., 0.9, kemudian nilai α dengan MSE terkecil dipilih untuk melakukan peramalan berikutnya.

2.9 Brown's Double Exponential Smoothing (B-DES)

Brown's Double Exponential Smoothing (B-DES) sama dengan *Brown's Linear Exponential Smoothing* yang dikemukakan oleh Brown (Makridakis dkk, 2003). Teori dasar dari B-DES mirip dengan *Double Moving Average* dimana kedua nilai *Single Smoothing* dan *Double Smoothing* tertinggal dari data yang sebenarnya dimana terdapat *trend*. Perbedaan antara metode *smoothing* adalah dengan adanya nilai atau parameter pemulusan yang dapat memperbaiki *trend* yang ada (Xiochen, 2013). Dengan demikian, pemulusan dengan metode ini memerlukan satu konstanta pemulusan (parameter *alpha*) yang nilainya sangat mempengaruhi hasil peramalan. Persamaan yang dipakai dalam metode Brown adalah sebagai berikut (Makridakis dkk, 2003).

Persamaan statistika smoothing tunggal (single)

$$S'_t = \alpha X_t + (1 - \alpha)S'_{t-1} \quad (2.9)$$

Persamaan statistika smoothing ganda (double)

$$S''_t = \alpha S'_t + (1 - \alpha)S''_{t-1} \quad (2.10)$$

Selanjutnya, peramalan untuk X_{t+m} , untuk $m > 1$

$$F_{t+m} = a_t + b_t m \quad (2.11)$$

Dengan a_t , nilai pemulusan eksponensial tunggal dan ganda pada saat t , dan b_t nilai pemulusan trend pada saat t ,

$$a_t = S'_t + (S'_t - S''_t) = 2S'_t - S''_t \quad (2.12)$$

$$b = \frac{a}{1-a} (S'_t - S''_t) \quad (2.13)$$

Penggunaan rumus yang ada diharuskan adanya nilai S'_{t-1} dan S''_{t-1} . Akan tetapi pada saat $t = 1$ nilai-nilai tersebut tidak tersedia. Karena nilai ini harus menetapkan S'_1 dan S''_1 dengan nilai X_1 (data aktual (Makridakis dkk,2003) ataupun dengan melakukan inialisasi.

2.10 Brown's Weighted Exponential Moving Average (B-WEMA)

Brown's Weighted Exponential Smoothing (B-WEMA) sangat mirip dengan metode *Weighted Exponential Moving Average* (WEMA). Dimana perbedaan utama adalah pada metode yang digunakan. Dalam (Hansun, 2013), WEMA menggabungkan metode *Weighted Moving Average* (WMA) dan *Exponential Moving Average* (EMA), sementara dalam B-WEMA menggabungkan WMA dengan *Brown's Double Exponential Smoothing* (B-DES) yang merupakan

pengembangan dari EMA. Berikut ini adalah proses atau prosedur dalam perhitungan B-WEMA (Hansun, 2016):

1. Menghitung nilai dasar (B_t) dengan menggunakan persamaan WMA pada (2.3) untuk data dan periode waktu tertentu.
2. Dengan menggunakan nilai dasar yang diperoleh, selanjutnya menghitung nilai peramalan dengan persamaan (2.9) sampai dengan persamaan (2.13) dimana

$$S'_{t-1} = S''_{t-1} = B_t \quad (2.14)$$

2.11 Ukuran Kesalahan

Untuk mengevaluasi harga parameter peramalan, digunakan ukuran kesalahan peramalan. Harga parameter peramalan yang terbaik adalah harga yang memberikan nilai kesalahan peramalan yang terkecil. Terdapat berbagai macam ukuran kesalahan yang dapat diklasifikasikan menjadi ukuran standar dalam statistik dan ukuran relatif. Ukuran kesalahan yang termasuk ukuran relatif adalah nilai rata-rata kesalahan persentase (mean percentage error) dan nilai rata-rata kesalahan persentase absolut (mean absolute percentage error). (Makridakis, 1998).

Ada beberapa perhitungan yang biasa dipergunakan untuk menghitung kesalahan peramalan (*forecast error*) total. Perhitungan ini dapat dipergunakan untuk membandingkan model peramalan yang berbeda, juga untuk mengawasi peramalan, untuk memastikan peramalan berjalan dengan baik. Model-model atau metode peramalan yang dilakukan kemudian divalidasi menggunakan sejumlah ukuran standar. Salah satu ukuran standar yang digunakan dalam menentukan

akurasi peramalan adalah *Mean Squared Error* (MSE), yang dirumuskan sebagai berikut (Makridakis dkk, 2003):

$$MSE = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \hat{x}_i)^2 \quad (2.15)$$

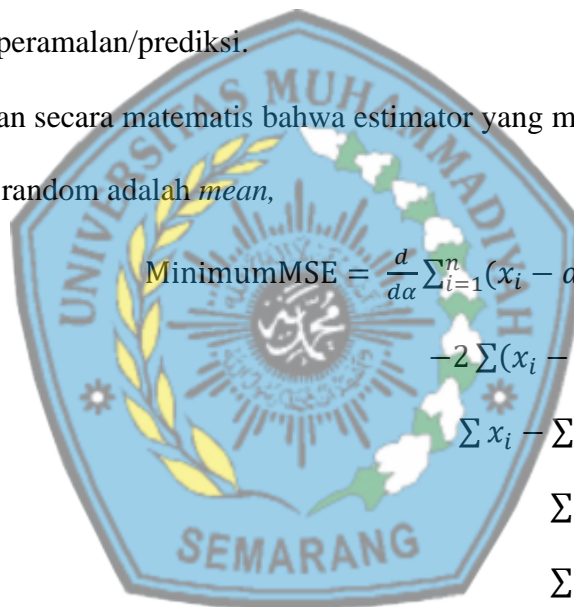
keterangan,

n adalah banyaknya data nilai kesalahan,

x_i adalah nilai data aktual dan,

\hat{x}_i adalah nilai peramalan/prediksi.

Dapat dibuktikan secara matematis bahwa estimator yang meminimkan MSE pada himpunan data random adalah *mean*,



$$\begin{aligned} \text{MinimumMSE} &= \frac{d}{d\alpha} \sum_{i=1}^n (x_i - \alpha)^2 = 0 \\ &-2 \sum (x_i - \alpha) = 0 \\ &\sum x_i - \sum \alpha = 0 \end{aligned}$$

$$\sum x_i = \sum \alpha$$

$$\sum x_i = n \cdot \alpha$$

$$\alpha = \frac{\sum x_i}{n}$$

$$\alpha = \bar{x} \quad (2.16)$$

MSE sangat baik dalam memberikan gambaran terhadap seberapa konsisten model yang dibangun. Dengan meminimalkan nilai MSE, berarti meminimalkan varian model. Model yang memiliki varian kecil mampu memberikan hasil yang relatif lebih konsisten untuk seluruh data input dibandingkan dengan model dengan varian besar (MSE besar). Mengukur akurasi menggunakan MSE terdapat dua kelemahan,

1. akoran ini menunjukkan kecocokan suatu model data historis. Sebagai ilustrasi, untuk meminimalkan MSE dalam pencocokan kurva, cukuplah digunakan polynomial berderajat tinggi. Namun, penggunaan polynomial derajat tinggi akan membuat model terlalu sensitif sehingga ketika digunakan untuk peramalan akan mengakibatkan galat yang besar (Primandari, 2016).
2. MSE tidak memperdulikan prosedur pada metode peramalan. Dalam artian, setiap peramalan memiliki prosedur yang berbeda, maka menggunakan MSE saja akan mengabaikan perbedaan antar metode tersebut (Makridakis dkk, 2003).

Oleh karena kelemahan yang ada pada MSE tersebut, terdapat ukuran alternatif lainnya yaitu salah satu adalah *Mean Absolute Percentage Error (MAPE)* yang merupakan ukuran galat relatif terhadap data aktual selama periode tertentu yang akan memberikan informasi persentase kesalahan terlalu tinggi atau terlalu rendah. Secara sistematis, MAPE dinyatakan sebagai berikut:

$$MAPE = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{|x_i - \bar{x}_i|}{x_i} \times 100\% \quad (2.17)$$

Kriteria nilai MAPE ditunjukkan pada Tabel (Change et all, 2007 dalam Bossarito Putro et all, 2018)

Tabel 2.11 Kriteria MAPE

Nilai MAPE	Kriteria
< 10%	Sangat Baik
10% - 20%	Baik
20% - 50%	Cukup
> 50%	Kurang

MAPE merupakan ukuran kesalahan yang membandingkan simpangan peramalan dengan data aktualnya. Akurasi peramalan akan semakin tinggi jika nilai-nilai MSE dan MAPE semakin kecil. Maka hasil peramalan yang mendekati kenyataan dapat dilihat berdasarkan kesalahan (*error*) minimal dari metode tersebut. Hasil ramalan yang memiliki nilai MSE dan MAPE terkecil dapat dikatakan merupakan ramalan yang akurat.

2.12 Levenberg Marquardt (LM)

Levenberg marquardt adalah algoritma yang dikembangkan dari algoritma *error* pada metode *backpropagation*. Pada algoritma jenis ini digunakan untuk menangani beberapa kelemahan algoritma *error* pada metode *backpropagation* dengan menggunakan optimasi numerik standar adalah dengan penggunaan pendekatan *Jacobian matrix*. Tujuan dari Levenberg marquardt adalah meminimalkan total error. (Ilis Susanti, 2014). Algoritma pada *levenberg marquardt* adalah salah satu cara menangani kelemahan dari kinerja algoritma *backpropagation*, dikarenakan algoritma *levenberg marquardt* dibuat sedemikian rupa agar dapat meminimalisasi jumlah kuadrat *error*. Algoritma jenis ini dapat memperbarui *weight* dengan memperkecil nilai *error* dari selisih *new weight*. Tetapi, pada saat yang bersamaan, algoritma ini akan mempertahankan *step size* agar tidak menjadi besar. (Kurniawan, 2012). Optimasi parameter pemulusan *alpha* (α) dengan algoritma *Levenberg- Marquardt* (LM) dapat dilakukan dengan bantuan *package* yang tersedia pada *software* R, dimana *package* dalam R yang digunakan untuk optimasi adalah *library* (*minpack.lm*). Pada *library* (*minpack.lm*) terdapat beberapa

function untuk melakukan optimasi, salah satu *function* yang ada adalah “*nls.lm*” dimana *function* ini melakukan optimasi menggunakan metode Levenberg-Marquardt (LM).

Cara kerja optimasi LM dalam R adalah dengan memasukkan nilai parameter *alpha* awal sembarang yang akan dioptimasi, diikuti dengan fungsi objektif yang telah dihitung sebelumnya dalam *function* masing-masing metode peramalan yang telah dibuat secara manual. Metode ini memiliki langkah-langkah yang bertujuan supaya nilai fungsi objektif yang akan diminimumkan mengalami penurunan pada iterasi selanjutnya. Fungsi objektif sendiri merupakan fungsi yang berisi perhitungan nilai *error* untuk masing-masing metode peramalan baik MSE ataupun MAPE. Hasil dari nilai parameter *alpha* yang dioptimasi ini akan mendapatkan hasil peramalan optimal dengan nilai MSE maupun MAPE yang lebih kecil. Pada dasarnya setiap iterasi terdiri dari tahap menentukan arah turun (*descent direction*) dan panjang langkah yang akan memberikan penurunan yang baik terhadap nilai fungsi objektif (Budiasih, 2009).

Metode LM merupakan salah satu metode optimasi untuk menyelesaikan masalah kuadrat terkecil yang didasarkan pada metode Gauss-Newton. Pada metode LM, arah turun ditentukan dengan mempertimbangkan parameter damping yang akan mempengaruhi arah dan juga besar langkah. Secara umum, algoritma LM meminimalkan residual kuadrat terboboti. Dimana nilai residual tersebut disebut dengan kriteria galat *chi-square* atau dalam artian yang sederhana dengan memperkecil fungsi *chi-square*, yaitu (Gavin, 2017):

$$\begin{aligned}\chi^2(p) &= \sum_{i=1}^m \left[\frac{x(t_i) - \hat{x}(t_i; p)^2}{w_i} \right] \\ &= \boldsymbol{\chi}^T \mathbf{W} \boldsymbol{\chi} - 2\boldsymbol{\chi}^T \mathbf{W} \boldsymbol{\chi} + \hat{\boldsymbol{\chi}}^T \mathbf{W} \hat{\boldsymbol{\chi}}\end{aligned}\quad (2.18)$$

Dengan nilai w_i adalah ukuran bobot setiap galat dari $x(t_i)$. Sementara \mathbf{W} adalah matriks diagonal dengan $\mathbf{W}_{ii} = 1/w_i^2$. Apabila residual merupakan rataan dari galat kuadrat $(x - \hat{x})^2$, maka bobotnya senilai $\mathbf{W}_{ii} = 1/(\sqrt{n})^2$. Jika fungsi $\hat{x}(t; p)$ non linier, maka meminimalkan nilai χ^2 dilakukan secara iterative. Tujuan dari setiap iterasi adalah menentukan perubahan h pada p parameter yang dapat mengurangi nilai χ^2 . Pada metode *Gradient Decscent*, nilai gradient dari fungsi objektif chi-kuadrat didefinisikan sebagai berikut.

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial p} \chi^2 &= -(\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}})^T \mathbf{W} \left[\frac{\partial \hat{\mathbf{y}}(p)}{\partial p} \right] \\ &= -(\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}})^T \mathbf{W} \mathbf{J}\end{aligned}\quad (2.19)$$

Dimana matriks jacobian $m \times n$ yaitu $[\partial \hat{\mathbf{y}} / \partial p]$ mewakili sensitivitas lokal dari fungsi $\hat{\mathbf{y}}(t; p)$ terhadap p parameter. Pembaharuan parameter h yang mewakili mengecilkan nilai χ^2 adalah.

$$\mathbf{h}_{gd} = \alpha \mathbf{J} \mathbf{W} (\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}) \quad (2.20)$$

dimana nilai skalar positif (α) menunjukkan besaran langkah pada metode *Gradient Decscent*. Sementara itu, nilai pembaharuan parameter (h) pada metode *Gauss-Newton* adalah sebagai berikut:

$$[\mathbf{J}^T \mathbf{W} \mathbf{J}] \mathbf{h}_{gd} = \mathbf{J}^T \mathbf{W} (\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}) \quad (2.21)$$

Pembaharuan parameter dari algoritma LM dikatakan mengadopsi metode *gradient decent* dan *Gauss-Newton*. Adapun h pada LM adalah sebagai berikut (Gavin,2017).

$$[J^T W J + \lambda I] \mathbf{h}_{lm} = J^T W (\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}) \quad (2.22)$$

Dengan nilai parameter λ menentukan pergerakan dari pembaharuan parameter, J adalah matriks jacobian $[\partial \hat{\mathbf{y}} / \partial \mathbf{p}]$ Dalam iterasi ke- i langkah h dievaluasi dengan membandingkan $\chi^2(\mathbf{p})$ dengan $\chi^2(\mathbf{p} + h)$. Langkah tersebut akan diterima jika matrik ρ_i lebih besar daripada ambang yang telah ditentukan sebelumnya $\varepsilon > 0$. Metrik ini mengukur aktual dari χ^2 sebagai pembanding kenaikan dari pembaharuan LM.

$$\begin{aligned} \rho_i &= \frac{\chi^2(\mathbf{p}) - \chi^2(\mathbf{p} + \mathbf{h}_{lm})}{(\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}})(\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}) - (\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}} - J \mathbf{h}_{lm})^T (\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}} - J \mathbf{h}_{lm})} \\ &= \frac{\chi^2(\mathbf{p}) - \chi^2(\mathbf{p} + \mathbf{h}_{lm})}{\mathbf{h}_{lm}^T (\lambda_i \mathbf{h}_{lm} + J^T W (\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}(\mathbf{p})))} \end{aligned} \quad (2.23)$$

Jika iterasi $\rho_i(\mathbf{h}_{lm})$ melebihi ambang, berarti $\mathbf{p} + h$ lebih baik daripada \mathbf{p} , kemudian \mathbf{p} digantikan dengan $\mathbf{p} + h$, dan λ dikurangi dengan suatu factor. Sebaliknya, jika λ meningkat oleh suatu factor, algoritma akan memproses ke iterasi selanjutnya (Primandari A.H.,2006).