BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Multikolinearitas

Salah satu syarat yang harus dipenuhi dalam pembentukan model regresi dengan beberapa variabel prediktor adalah tidak ada kasus multikolinearitas. Pendektesian kasus multikolinearitas yaitu dengan kofisien korelasi dan kriteria nilai VIF (*Variance Inflation Factor*). Terdapat kasus multikolinearitas jika nilai jika nilai VIF lebih besar dari 10. Nilai VIF dinyatakan sebagai berikut.

$$VIF_k = \frac{1}{1-R_k^2} \tag{2.1}$$

dimana,

$$R_k^2 = \frac{SSR}{SST} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i-\bar{y})_k^2}{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})_k^2} \tag{2.2}$$

dengan R_k^2 adalah koefisien determinasi antara satu variabel predictor dengan variabel predictor lainnya (Hocking, 1996)

2.2 Regresi Poisson

Regresi Poisson merupakan model regresi nonlinear yang sering digunakan untuk data *count*, dimana variabel respon mengikuti distribusi poisson (Agresti, 2002). Distribusi Poisson sering digunakan untuk memodelkan peristiwa yang memiliki peluang kejadian kecil pada interval waktu tertentu (Osgood, 2000). Fungsi probabilitas variabel random diskrit (y) berdistribusi Poisson dengan parameter μ dinyatakan sebagai berikut.

$$f(y;\mu) = \frac{e^{-\mu}\mu^{y}}{y!}; y = 0,1,2, \dots dan\ \mu > 0 \tag{2.3}$$

Keterangan:

μ : Rata-rata variabel respon yang berdistribusi poisson.

y : Variabel dependen

e : Bilangan natural -2.718

Sedangkan untuk nilai harapan dan ragam pada Poisson adalah dimana nilai rata-rata dan varian dari y mempunyai nilai lebih dari 0 sebagai berikut.

$$E(Y) = Var(Y) = \mu \tag{2.4}$$

Analisis regresi Poisson biasanya diterapkan dalam penelitian kesehatan masyarakat, biologi dan teknik. Model regresi Poisson termasuk model linear terampat (*Generalized Linear Model*) dengan data respon mengikuti sebaran Poisson. Persamaan dari model regresi Poisson adalah sebagai berikut.

$$\mu_i = e^{x_i^T \beta} = e^{(\beta_0 + \beta_1 X_{i1} + \beta_2 X_{i2} + \dots + \beta_k X_{ik})} \tag{2.5}$$

Keterangan:

μ_i : Rata-rata jumlah kejadian yang terjadi dalam interval waktu tertentu.

$\beta_0, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$: Parameter

$X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{ik}$: Variabel Independen

2.2.1 Uji Estimasi Parameter Regresi Poisson

Estimasi parameter model regresi poisson dilakukan dengan metode *Maximum Likelihood Estimation* (MLE). Fungsi *Likelihood* dirumuskan sebagai berikut.

$$L(\beta) = \frac{e^{\left(-\sum_{i=1}^{n} e^{\left(x_i^T \beta\right)}\right)} \left(e^{\sum_{i=1}^{n} y_i x_i^T \beta}\right)}{\prod_{i=1}^{n} y_i!} \tag{2.6}$$

dimana,

$\beta = [\beta_0 \quad \beta_1 \quad \dots \quad \beta_k]^T$; $x_i = [1 \quad x_{1i} \quad \dots \quad x_{ki}]^T$

Selanjutnya dilakukan iterasi Newton Raphson untuk memaksimumkan fungsi *log-Likehood* dirumuskan sebagai berikut.

$$\ln L(\beta) = -\sum_{i=1}^{n} e^{x_i^T \beta} + \sum_{i=1}^{n} y_i x_i^T \beta - \sum_{i=1}^{n} \ln(y_i!) \tag{2.7}$$

2.2.2 Pengujian Signifikansi Parameter Regresi Poisson

Pengujian signifikansi parameter terdiri dari pengujian serentak dan parsial menggunakan *Maximum Likelihood Ratio Test* (MLRT) dengan hipotesis sebagai berikut (McCullach & Nelder, 1989).

1. Uji signifikansi secara serentak

   Uji signifikansi secara serentak menggunakan hipotesis sebagai berikut:

   H_0 : $\beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_P = 0$

   H_1 : paling sedikit ada satu $\beta_k \neq 0, k = 1,2, \dots, p$

   Statistik uji yang digunakan adalah sebagai berikut.

$$D(\hat{\beta}) = -2\ln(\Lambda) = -2\ln\left(\frac{L(\widehat{\omega})}{L(\widehat{\Omega})}\right) \tag{2.8}$$

   Keterangan:

   $L(\widehat{\omega})$: Fungsi *likelihood* tanpa melibatkan variabel prediktor

   $L(\widehat{\Omega})$: Fungsi *likelihood* dengan melibatkan variabel prediktor

   Kriteria Pengujian:

Tolak H_0 jika nilai dari $D(\hat{\beta}) > X^2_{(k,a)}$ yang artinya minimal terdapat satu parameter dalam model regresi Poisson yang berpengaruh signifikan terhadap variabel respon.

2. Uji signifikansi secara parsial

   Pengujian secara parsial dilakukan untuk mengetahui parameter mana saja yang memberikan pengaruh signifikan terhadap variabel respon dengan hipotesis sebagai berikut.

   H_0 : $\beta_k = 0$

   H_1 : minimal ada satu $\beta_k \neq 0, k = 1,2, \dots, p$

   Statistik uji yang digunakan adalah sebagai berikut.

$$Z_{hitung} = \frac{\beta_k}{se(\beta_k)} \tag{2.9}$$

   Kriteria Pengujian:

   Tolak H_0 jika nilai dari $|Z_{hitung}| > Z_{\left(\frac{a}{2}\right)}$ yang artinya parameter tersebut berpengaruh signifikan terhadap variabel respon dalam model regresi Poisson.

2.2.3 Overdispersi Regresi Poisson

Regresi Poisson dikatakan overdispersi apabila nilai variansnya lebih besar dari nilai rata-ratanya. Artinya sifat *equidispersion* dari asumsi regresi Poisson tidak terpenuhi. *Overdispersion* menyebabkan taksiran parameter model bias dan tidak efisien. Selain itu *overdispersion* menyebabkan tingkat kesalahan model semakin besar dan regresi Poisson menjadi tidak sesuai. (Cameron & Trivedi, 1990).

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{(y_i-\mu_i)^2}{\sigma_i^2} \sim \mathcal{X}^2_{(n-p)}; dengan\ p = k+1 \qquad (2.10)$$

Keberadaan *overdispersion* pada model regresi Poisson dapat diuji dengan nilai disperse *pearson's Chi-square* atau *deviance* yang dibagi dengan derajat bebasnya, diperoleh nilai lebih besar dari 1.

2.3 Generalized Poisson Regression

Model *Generalized Poisson Regression* (GPR) merupakan suatu model yang sesuai untuk data *count* apabila terjadi over/under disperse. Parameter yang terdapat dalam model GPR ini adalah μ dan satu parameter tambahan yaitu θ sebagai parameter dispersi. Distribusi *Generalized Poisson* (GP) dapat dituliskan sebagai berikut (Famoye, 2004).

$$f(y;\mu;\theta) = \left(\frac{\mu}{1+\theta\mu}\right)^{y} \frac{(1+\theta\mu)^{y-1}}{y!} e^{\left(\frac{-\mu(1+\theta y)}{1+\theta\mu}\right)}, y = 0,1,2,\ldots \qquad (2.11)$$

dengan *mean* dan varians model GPR adalah $E(y) = \mu$ dan $var(y) = \mu(1+\theta\mu)^2$. Apabila θ sama dengan nol maka model GPR akan menjadi model regresi Poisson biasa, sedangkan apabila $\theta > 0$ maka model GPR merepresentasikan telah terjadi overdispersi, dan apabila $\theta < 0$ maka telah terjadi underdispersi. Model GPR memiliki bentuk yang sama dengan model regresi Poisson.

$$\mu_i = e^{x_i^T\beta} = e^{(\beta_0+\beta_1 X_{i1}+\beta_2 X_{i2}+\cdots+\beta_k X_{ik})} \qquad (2.12)$$

2.3.1 Penaksiran Parameter Model GPR

Penaksiran parameter model GPR dilakukan dengan metode *Maximum Likelihood Estimation* (MLE). Fungsi *likelihood* untuk model GPR adalah sebagai berikut:

$$\ln L(\beta,\theta) = \sum_{i=1}^{n}\left\{\left[y_j(x_i^T\beta)\right] + \left[-\ln\left(1+\theta\, e^{(x_i^T\beta)}\right)\right] + \left[(y_j-1)\ln(1+\theta_j y_j) - \ln(y_j!)\right] + \left[\frac{e^{(x_i^T\beta)}(1+\theta_j y_j)}{1+\theta_j e^{(x_i^T\beta)}}\right]\right\} \quad (2.13)$$

2.3.2 Pengujian Parameter Model GPR

Untuk pengujian signifikansi parameter pada model GPR terdiri atas uji serentak dan uji parsial.

1. Uji signifikansi secara serentak

   Uji signifikansi secara serentak untuk estimasi parameter model GPR menggunakan uji devians dengan hipotesis sebagai berikut:

   Uji signifikansi secara serentak menggunakan hipotesis sebagai berikut:

   H_0 : $\beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_P = 0$

   H_1 : paling sedikit ada satu $\beta_k \neq 0, k = 1,2,\ldots,p$

   Statistik uji yang digunakan adalah sebagai berikut.

   $$D(\hat{\beta}) = -2\ln(\Lambda) = -2\ln\left(\frac{L(\widehat{\omega})}{L(\widehat{\Omega})}\right) \quad (2.14)$$

   Keterangan:

   $L(\widehat{\omega})$: Fungsi *likelihood* tanpa melibatkan variabel prediktor

   $L(\widehat{\Omega})$: Fungsi *likelihood* dengan melibatkan variabel prediktor

   Kriteria Pengujian:

   Tolak H_0 jika nilai dari $D(\hat{\beta}) > X^2_{(k,a)}$ yang artinya minimal terdapat satu parameter dalam model GPR yang berpengaruh signifikan terhadap variabel respon.

2. Uji signifikansi secara parsial

Pengujian secara parsial dilakukan untuk mengetahui parameter mana saja yang memberikan pengaruh signifikan terhadap variabel respon dengan hipotesis sebagai berikut.

H_0 : $\beta_k = 0$

H_1 : minimal ada satu $\beta_k \neq 0, k = 1,2, \dots, p$

Statistik uji yang digunakan adalah sebagai berikut.

$$Z_{hitung} = \frac{\beta_k}{se(\beta_k)} \tag{2.15}$$

Kriteria Pengujian:

Tolak H_0 jika nilai dari $|Z_{hitung}| > Z_{\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$ yang artinya parameter tersebut berpengaruh signifikan terhadap variabel respon dalam model GPR.

2.4 Regresi Binomial Negatif

Regresi binomial negatif merupakan salah satu solusi untuk mengatasi adanya overdispersi. Model regresi binomial negative memiliki fungsi massa peluang sebagai berikut (Greene, 2008)

$$f(y, \mu, \theta) = \frac{\Gamma(y+\theta^{-1})}{\Gamma(\theta^{-1})\Gamma(y+1)} \left(\frac{1}{1+\theta\mu}\right)^{\theta^{-1}} \left(\frac{\theta\mu}{1+\theta\mu}\right)^{y}, y = 0,1,2, \dots \tag{2.16}$$

Analisis regresi binomial negatif digunakan digunakan untuk mengetahui hubungan antar dua variabel atau lebih yang didasarkan pada distribusi binomial negative. Model regresi binomial negative dinyatakan sebagai berikut:

$$\mu_i = e^{x_i^T\beta} = e^{(\beta_0+\beta_1X_{i1}+\beta_2X_{i2}+\dots+\beta_kX_{ik})} \tag{2.17}$$

Fungsi peluang dari distribusi binomial negative adalah

$$f(y,\mu,\theta) = \left\{\exp \ln\left(\frac{\Gamma(y+\theta^{-1})}{\Gamma(\theta^{-1})\Gamma(y+1)}\right) + \frac{1}{\theta}\left(\frac{1}{1+\theta\mu}\right)\right\} + y\ln\left(\frac{\theta\mu}{1+\theta\mu}\right) \quad (2.18)$$

2.4.1 Estimasi Parameter Regresi Binomial Negatif

Pendugaan parameter model regresi binomial negative menggunakan metode *Maximum Likelihood Estimation* (MLE). Fungsi *likelihood* dari regresi binomial negative adalah sebagai berikut.

$$L(\beta,\theta) = \prod_{i=1}^{n}\left\{\frac{\Gamma(y_i+\theta^{-1})}{\Gamma(\theta^{-1})\Gamma(y_i+1)} + \theta^{-1}\left(\frac{1}{1+\theta\mu_i}\right)^{\theta^{-1}} + \left(\frac{\theta\mu_i}{1+\theta\mu_i}\right)^{y_i}\right\} \quad (2.19)$$

Bentuk log-*likelihood* dari regresi binomial negative adalah.

$$\ln\big(L(\beta,\theta)\big) = \sum_{i=1}^{n}\left\{\ln\frac{\Gamma(y_i+\theta^{-1})}{\Gamma(\theta^{-1})\Gamma(y_i+1)} + \theta^{-1}\ln\left(\frac{1}{1+\theta\mu_i}\right) + y_j\ln\left(\frac{\theta\mu_i}{1+\theta\mu_i}\right)\right\}$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left\{\ln\frac{\Gamma(y_i+\theta^{-1})}{\Gamma(\theta^{-1})\Gamma(y_i+1)} + y_i\ln(\theta\mu_i) - (y_i+\theta^{-1})\ln(1+\theta\mu_i)\right\} \quad (2.20)$$

2.4.2 Pengujian Signifikansi Parameter Regresi Binomial Negatif

Untuk pengujian signifikansi parameter pada regresi binomial negative terdiri atas uji serentak dan uji parsial.

1. Uji signifikansi secara serentak

   Uji signifikansi secara serentak untuk estimasi parameter model regresi Binomial Negatif menggunakan uji devians dengan hipotesis sebagai berikut:

   Uji signifikansi secara serentak menggunakan hipotesis sebagai berikut:

   H_0 : $\beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_P = 0$

   H_1 : paling sedikit ada satu $\beta_k \neq 0, k = 1,2,\ldots,p$

   Statistik uji yang digunakan adalah sebagai berikut.

$$D(\hat{\beta}) = -2\ln(\Lambda) = -2\ln\left(\frac{L(\widehat{\omega})}{L(\widehat{\Omega})}\right) \quad (2.21)$$

Keterangan:

$L(\hat{\omega})$: Fungsi *likelihood* tanpa melibatkan variabel prediktor

$L(\hat{\Omega})$: Fungsi *likelihood* dengan melibatkan variabel prediktor

Kriteria Pengujian:

Tolak H_0 jika nilai dari $D\hat{\beta} > X^2_{(k,a)}$ yang artinya minimal terdapat satu parameter dalam model regresi Binomial Negatif yang berpengaruh signifikan terhadap variabel respon.

2. Uji signifikansi secara parsial

Pengujian secara parsial dilakukan untuk mengetahui parameter mana saja yang memberikan pengaruh signifikan terhadap variabel respon dengan hipotesis sebagai berikut.

H_0 : $\beta_k = 0$

H_1 : minimal ada satu $\beta_k \neq 0, k = 1,2, \ldots, p$

Statistik uji yang digunakan adalah sebagai berikut.

$$Z_{hitung} = \frac{\beta_j}{se(\beta_j)} \tag{2.22}$$

Kriteria Pengujian:

Tolak H_0 jika nilai dari $|Z_{hitung}| > Z_{\left(\frac{a}{2}\right)}$ yang artinya parameter tersebut berpengaruh signifikan terhadap variabel respon dalam model regresi Binomial Negatif.

2.5 Efek Spasial

Pemodelan pada data spasial dapat dikelompokkan berdasarkan tipe data spasial yang digunakan yaitu spasial titik dan spasial area. Spasial titik adalah metode yang menggunakan informasi jarak (*distance*) sebagai pembobotnya. Sedangkan spasial area menggunakan persinggungan antar lokasi yang berdekatan. Masing-masing tipe data spasial tersebut dapat dikelompokkan lagi berdasarkan jenis data yang digunakan yaitu *cross* sectional dan *time series*. Pemodelan data selalu melibatkan matriks pembobot spasial. Sedangkan efek spasial pada data dapat berupa error yang saling berkorelasi (dependensi spasial) maupun keragaman (heterogenitas) spasial antar lokasi.

2.5.1 Uji Heterogenitas Spasial

Pengujian heterogenitas spasial dilakukan untuk melihat kekhasan pada setiap lokasi pengamatan yang akan mengakibatkan parameter regresi yang dihasilkan berbeda secara spasial. Pengujian heterogenitas spasial dilakukan dengan statistic uji *Breush-Pagan* (BP) dengan hipotesis sebagai berikut.

$H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \cdots = \sigma_n^2 = \sigma^2$ (variansi antar lokasi sama)

H_1 : minimal ada satu $\sigma_i^2 \neq \sigma^2$ (variansi antar lokasi berbeda)

Statistik uji yang digunakan adalah sebagai berikut.

$$BP = \left(\frac{1}{2}\right) f^T Z (Z^T Z)^{-1} Z^T f \tag{2.23}$$

Dengan elemen vektor f adalah:

$$f_i = \frac{e_i^2}{\sigma^2} - 1$$

$$e_i = y_i - y_i$$

Z merupakan matriks berukuran $nx(k+1)$ yang berisi vektor yang sudah dinormal standarkan untuk setiap observasi.

Kriteria Pengujian:

Tolak H_0 jika nilai dari $BP > X^2_{(\alpha,k)}$ atau $p - value < \alpha$ yang artinya terjadi heteroskedastisitas dalam model atau variansi antar lokasi daerah.

2.5.2 Uji Dependensi Spasial

Pengujian dependensi spasial menggunakan uji Moran's I dengan hipotesis sebagai berikut.

$H_0: I = 0$ (tidak terdapat dependensi spasial)

$H_1: I \neq 0$ (terdapat dependensi spasial)

Statistik uji yang digunakan sebagai berikut.

$$Z = \frac{\hat{I} - E(\hat{I})}{\sqrt{Var(\hat{I})}} \tag{2.24}$$

dimana $\hat{I} = \frac{e^T W_e}{e^T e}$ dengan e merupakan vektor residual dan W merupakan matriks pembobot spasial antar lokasi. Rumus mean dan varians dari Moran's I sebagai berikut.

$$E(\hat{I}) = \frac{tr(MW)}{(n-k)} \tag{2.25}$$

$$Var(\hat{I}) = \frac{tr(MWMW^T) + tr(Mw)^2 + \left(tr(MW)\right)^2}{d - E(\hat{I})^2} \tag{2.26}$$

Dengan $d = (n-k)(n-k-2); M = 1 - X(X^T - X)^{-1}X^T$.

Kriteria Pengujian:

Tolak H_0 jika nilai $|Z| > Z_{\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$ yang artinya terdapat dependensi spasial dalam model.

2.6 Penentuan Bandwith

Penentuan Bandwith dan Pembobot Optimum secara teoritis Bandwith merupakan luasan dengan radius b dari titik pusat lokasi yang digunakan sebagai dasar menentukan bobot setiap pengamatan terhadap model regresi pada lokasi tersebut. Pengamatan-pengamatan yang terletak di dalam radius b masih dianggap berpengaruh terhadap model pada lokasi tersebut sehingga akan diberi bobot tergantung pada fungsi yang digunakan. Selain itu, bandwith menjadi pengontrol keseimbangan antara kesesuaian kurva terhadap data dan kemulusan data. Nilai bandwith yang sangat kecil menyebabkan varians semakin besar. Hal ini dikarenakan jika nilai bandwith yang sangat kecil maka akan semakin sedikit pengamatan yang berada dalam radius b, sehingga model yang diperoleh akan sangat kasar (*under smoothing*). Sebaliknya nilai bandwith yang besar akan menimbulkan bias yang semakin besar karena semakin banyak pengamatan yang berada dalam radius b, sehingga model yang yang diperoleh akan terlampau halus (*over smoothing*). Pemilihan bandwith optimum menjadi sangat penting karena akan mempengaruhi ketepatan model terhadap data, yaitu mengatur varians dan bias dari model. Penentuan bandwith optimum dilakukan menggunakan metode *Cross Validation* (CV) sebagai berikut:

$$CV(b) = \sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_{\neq i}(b))^2 \qquad (2.27)$$

Keterangan:

$\hat{y}_{\neq i}(b)$: Nilai penaksir y_i dengan pengamatan lokasi $(u_i v_i)$.

y_i :Variabel Independen

2.7 Matriks Pembobot Spasial

Matriks pembobot spasial menunjukkan keragaman spasial antara lokasi yang satu dengan yang lain. Elemen dari matriks pembobot spasial (W) merupakan fungsi dari jarak *Euclidian* antar lokasi. Pembentukan fungsi pembobot dari jarak *Euclidian* dapat menggunakan metode *Adaptive Kernel*.

2.7.1 *Adaptive Kernel*

Menurut (Fotheringham, 2014), metode *Adaptive Kernel* sangat cocok apabila suatu pengamatan tersebar dengan pola tidak beraturan. Metode *Adaptive Kernel* memungkinkan untuk mendapatkan nilai bandwith yang berbeda untuk setiap titik pengamatan. Hal ini dikarenakan metode adaptive kernel dapat menyesuaikan dengan kondisi titik pengamatan. Adapun jenis pembobot *Adaptive Kernel* yang digunakan yaitu:

1. *Adaptive Bisquare Kernel*

$$w_j = \left[1 - \left(\frac{d_{ij}}{h}\right)^2\right]^2 \qquad (2.28)$$

2. *Adaptive Gaussian Kernel*

$$w_j = e^{\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{d_{ij}}{h}\right)^2\right]} \qquad (2.29)$$

3. *Adaptive Tricube Kernel*

$$w_j = \left[1 - \left(\frac{d_{ij}}{h}\right)^3\right]^3 \qquad (2.30)$$

dengan $d_{ij} = \sqrt{(u_i, u_j)^2 + (v_i, v_j)^2}$ adalah jarak *Euclidian* antara lokasi (u_i, v_i) sedangkan h adalah parameter penghalus atau yang disebut sebagai *bandwidth*.

2.8 Geographically Weighted Generalized Poisson Regression (GWGPR)

Model GWGPR merupakan pengembangan dari regresi *Generalized Poisson* (GPR). Model GWGPR menggunakan pembobot geografis pada penaksiran parameternya. Sehingga model GWGPR akan menghasilkan penaksiran parameter lokal, dengan parameter yang berbeda untuk setiap lokasi. Fungsi distribusi probabilitas dari GWGPR untuk setiap lokasi adalah sebagai berikut (Fitri, 2017).

$$f(y_i \mid \mu_i; \theta_i) = \left(\frac{\mu_i}{1+\theta\mu_i}\right)^{y} \frac{(1+\theta y_i)^{y_i-1}}{y_i!} e^{\left(\frac{-\mu_i(1+\theta y_i)}{1+\theta\mu_i}\right)}, y_i = 0,1,2,\ldots \qquad (2.31)$$

Bentuk persamaan GWGPR adalah sebagai berikut.

$$\mu_i = e^{x_i^T \beta(u_i,v_i)} = e^{(\beta_0(u_i,v_i)+\beta_1(u_i,v_i)x_{i1}+\cdots+\beta_p(u_i,v_i)x_{ip})} \qquad (2.32)$$

2.8.1 Estimasi Parameter GWGPR

Metode yang digunakan dalam penaksiran parameter model GWGPR adalah *Maximum Likelihood Estimation* (MLE). Faktor letak geografis menunjukkan sifat lokal pada model. Fungsi log-*likelihood* yang telah ditambahkan pembobot untuk model GWGPR adalah sebagai berikut.

$$\ln L(\beta((u_i,v_i),\theta_i)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} w_{ij}(u_i,v_i)\left[y_j\left(x_i^T\beta_{(u_iv_i)}\right)\right] + \left[-\ln\left(1+\theta\, e^{\left(x_i^T\beta_{(u_iv_i)}\right)}\right)\right] +$$

$$\left[(y_j-1)\ln(1+\theta_j y_j) - \ln(y_j!)\right] + \left[\frac{e^{\left(x_i^T\beta_{(u_iv_i)}\right)}(1+\theta_j y_j)}{1+\theta_j e^{\left(x_i^T\beta_{(u_iv_i)}\right)}}\right] \qquad (2.33)$$

Proses mendapatkan penaksir parameter GWGPR adalah dengan menurunkan fungsi *ln likelihood* terhadap masing-masing parameternya kemudian disamakan dengan nol. Namun hasilnya tidak dapat dilakukan secara analitik, sehingga perlu digunakan prosedur iterative. Iterasi yang digunakan pada penaksiran parameter adalah iterasi *Numeric Newton Raphson*. Algoritma metode *Newton Raphson* adalah sebagai berikut.

1. Menentukan nilai taksiran awal parameter

   $\beta^*_{(0)} = [\theta_0 \quad \beta_{00} \quad \beta_{10} \ldots \beta_{k0}]$, iterasi pada saat $m = 0$

2. Membentuk vektor gradient (g)

$$g^T\left(\beta^*_{(m)}\right)_{(k+1)x_1} = \left(\frac{\partial \ln L(\beta^*)}{\partial \theta}, \frac{\partial \ln L(\beta^*)}{\partial \beta_0}, \frac{\partial \ln L(\beta^*)}{\partial \beta_1}, \ldots \frac{\partial \ln L(\beta^*)}{\partial \beta_k}\right)_{\beta=\beta^*_{(m)}}$$

   dengan k adalah banyaknya parameter yang diestimasi.

3. Membentuk matriks Hessian H yang simetris

$$H\left(\beta^*_{(m)}\right)_{(k+1)x_1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \ln L(\beta^*)}{\partial \theta^2} & \frac{\partial^2 \ln L(\beta^*)}{\partial \theta \partial \beta} & \cdots & \frac{\partial^2 \ln L(\beta^*)}{\partial \theta \partial \beta} \\ & \frac{\partial^2 \ln L(\beta^*)}{\partial \beta^T \partial \beta} & \cdots & \frac{\partial^2 \ln L(\beta^*)}{\partial \theta \partial \beta} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & \frac{\partial^2 \ln L(\beta^*)}{\partial \beta^T \partial \beta} \end{bmatrix}_{\beta=\beta^*_{(m)}}$$

4. Subtitusi nilai $\beta^*_{(0)}$ ke elemen-elemen vektor g dan matriks H sehingga diperoleh vektor$g_{(0)}$ dan matriks $H_{(0)}$

5. Melakukan iterasi mulai dari $m = 0$ pada persamaan

   $\beta^*_{(m+1)} = \beta^*_{(m)} - H^{-1}\left(\beta^*_{(m)}\right)g\left(\beta^*_{(m)}\right)$

   Nilai dari $\beta^*_{(t)}$ merupakan nilai taksiran parameter yang konvergen pada saat iterasi ke-*m*.

   Jika belum mencapai estimasi parameter yang konvergen, maka pada langkah ke-2 dilakukan kembali sampai mencapai konvergen. Estimasi parameter yang konvergen diperoleh jika nilai $\left\|\beta^*_{(m+1)} - \beta^*_{(m)}\right\| < \varepsilon$, dimana ε lebih besar dari nol dan sangat kecil.

2.8.2 Pengujian Signifikansi Model GWGPR

Pengujian signifikansi parameter model GWGPR terdiri dari uji serentak dan parsial.

1. Uji signifikansi secara serentak

   Uji signifikansi serentak menggunakan *Maximum Likelihood Ratio Test* (MLRT) dengan hipotesis sebagai berikut.

   H_0: $\beta_1(u_i, v_i) = \beta_2(u_i, v_i) = \cdots \beta_p(u_i, v_i) = 0$

   H_0 : paling sedikit ada satu $\beta_k(u_i, v_i) \neq 0, k = 1,2, \dots, p$

   Statistic uji yang digunakan adalah sebagai berikut.

   $$D(\hat{\beta}) = -2\ln(\Lambda) = -2\ln\left(\frac{L(\widehat{\omega})}{L(\widehat{\Omega})}\right) \quad (2.34)$$

   Tolak H_0 jika nilai dari $D\hat{\beta} > X^2_{(\alpha,k)}$ yang artinya minimal terdapat satu parameter dalam model GWGPR yang berpengaruh signifikan terhadap variabel respon.

2. Uji signifikansi secara parsial

   Pengujian secara parsial dilakukan untuk mengetahui parameter mana saja yang memberikan pengaruh signifikan terhadap variabel respon pada tiap lokasi dengan hipotesis sebagai berikut.

   H_0 : $\beta_k(u_i, v_i) = 0$

   H_1 : minimal ada satu $\beta_k \neq 0, k = 1,2, \dots, p$

   Statistic uji yang digunakan adalah sebagai berikut.

$$Z = \frac{\beta_k(u_i,v_i)}{se(\beta_k(u_i,v_i))} \tag{2.35}$$

Tolak H_0 jika nilai dari $|Z| > Z_{\frac{\alpha}{2}}$ yang artinya parameter tersebut berpengaruh signifikan terhadap variabel respon di tiap lokasi dalam model GWGPR.

2.9 *Geographically Weighted Negative Binomial Regression* (GWNBR)

Menurut (Ricardo, 2013) dalam penelitian (Irhamah, 2019) *Geographically Weighted Negative Binomial Regression* (GWNBR) merupakan salah satu metode yang cukup efektif menduga data yang memiliki heterogenitas spasial untuk data *count* yang overdispersi. Model GWNBR merupakan pengembangan dari model regresi binomial negatif. Model GWNBR menghasilkan parameter lokal dengan masing-masing lokasi akan memiliki parameter yang berbeda-beda. Model GWNBR dapat dirumuskan sebagai berikut.

$$\mu_i = e^{x_i^T \beta(u_i,v_i)} = e^{(\beta_0(u_i,v_i)+\beta_1(u_i,v_i)x_{i1}+\cdots+\beta_p(u_i,v_i)x_{ip})} \tag{2.36}$$

dimana,

y_i : nilai observasi respon ke-*i*

x_{ik} : nilai observasi variabel predictor ke-*k* pada pengamatan lokasi(u_i, v_i)

$\beta_j(u_i, v_i)$: Koefisien regresi variabel predictor ke-*j* untuk setiap lokasi (u_i, v_i)

$\theta(u_i, v_i)$: parameter disperse untuk setiap lokasi (u_i, v_i)

Fungsi distribusi binomial negative untuk setiap lokasi dapat ditulis dalam bentuk persamaan sebagai berikut.

$$f\left(y_i \middle| \beta_j(u_i, v_i), \theta_i\right) = \frac{\Gamma\left(y_i + \frac{1}{\theta_i}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{\theta_i}\right)\Gamma\left(y_i + 1\right)} + \left(\frac{1}{1+\theta_i\mu_i}\right)^{\frac{1}{\theta_i}} + \left(\frac{\theta_i\mu_i}{1+\theta_i\mu_i}\right)^{y_i}, y_i = 0,1,2, \ldots \qquad (2.37)$$

dimana:

$\mu_i = e^{\, x_i^T \beta(u_i, v_i)}, \theta_i = \theta(u_i, v_i)$

2.9.1 Estimasi Parameter Model GWNBR

Pendugaan parameter model GWNBR bisa menggunakan metode *Maximum Likelihood Estimation* (MLE). Fungsi *likelihood* dari GWNBR adalah sebagai berikut.

$$L(\beta(u_i, v_i), \theta_i, i = 1,2, \ldots, n)$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \left[\prod_{r=0}^{y-1} \left(r + \frac{1}{\theta_i} \right) \frac{1}{y_i!} \left(\frac{1}{1+\theta\mu_i} \right)^{\theta^{-1}} + \left(\frac{\theta\mu_j}{1+\theta\mu_i} \right)^{y_i} \right] \qquad (2.38)$$

Kemudian fungsi *likelihood* tersebut diubah ke dalam bentuk logaritma natural sehingga menjadi.

$$\ln L(\beta(u_i v_i), \theta_i) = \sum_{i=1}^{n} \left[\sum_{r=1}^{y_j - 1} \ln(r + \theta_i^{-1}) - \ln(y_i!) + y_i \ln(\theta_i\mu_i) - (y_i + \theta_i^{-1}) \ln(1 + \theta_i\mu_i) \right] \qquad (2.39)$$

dengan $\mu_i = e^{\, x_i^T \beta(u_i, v_i)}$ maka diperoleh bentuk persamaan logaritma fungsi likelihood dengan pembobot geografis pada model GWNBR.

$$\ln L(\beta(u_i v_i), \theta_i, i = 1,2, \ldots, n)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} w_{ij_{(u_i v_i)}} \left[\sum_{r=0}^{y_i^{-1}} \ln\left(r + \theta_j^{-1}\right) - \ln(y_i!) + y_i \ln(\theta_i e^{\, x_i^T \beta(u_i, v_i)} - \left(y_i + \theta_j^{-1}\right) \ln\left(1 + (\theta_j e^{\, x_i^T \beta(u_i, v_i)}\right) \right] \qquad (2.40)$$

Proses mendapatkan penaksir parameter GWGPR adalah dengan menurunkan fungsi *ln likelihood* terhadap masing-masing parameternya kemudian disamakan dengan nol. Langkah-langkah estimasi parameter dengan metode iterasi *Numeric Newton Raphson*. Algoritma metode *Newton Raphson* adalah sebagai berikut.

1. Menentukan nilai taksiran awal parameter

   $\beta^*_{(0)} = [\theta_0 \quad \beta_{00} \quad \beta_{10} \ldots \beta_{k0}]$, iterasi pada saat $m = 0$

2. Membentuk vektor gradient (g)

$$g^T\left(\beta^*_{(m)}\right)_{(k+1)x_1} = \left(\frac{\partial \ln L(\beta^*)}{\partial \theta}, \frac{\partial \ln L(\beta^*)}{\partial \beta_0}, \frac{\partial \ln L(\beta^*)}{\partial \beta_1}, \ldots \frac{\partial \ln L(\beta^*)}{\partial \beta_k}\right)_{\beta=\beta^*_{(m)}}$$

   dengan k adalah banyaknya parameter yang diestimasi.

3. Membentuk matriks Hessian H yang simetris

$$H\left(\beta^*_{(m)}\right)_{(k+1)x_1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \ln L(\beta^*)}{\partial \theta^2} & \frac{\partial^2 \ln L(\beta^*)}{\partial \theta \partial \beta} & \cdots & \frac{\partial^2 \ln L(\beta^*)}{\partial \theta \partial \beta} \\ & \frac{\partial^2 \ln L(\beta^*)}{\partial \beta^T \partial \beta} & \cdots & \frac{\partial^2 \ln L(\beta^*)}{\partial \theta \partial \beta} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & \frac{\partial^2 \ln L(\beta^*)}{\partial \beta^T \partial \beta} \end{bmatrix}_{\beta=\beta^*_{(m)}}$$

4. Subtitusi nilai $\beta^*_{(0)}$ ke elemen-elemen vektor g dan matriks H sehingga diperoleh $g_{(0)}$ dan $H_{(0)}$

5. Melakukan iterasi mulai dari $m = 0$ pada persamaan

$$\beta^*_{(m+1)} = \beta^*_{(m)} - H^{-1}\left(\beta^*_{(m)}\right)g\left(\beta^*_{(m)}\right)$$

   Nilai dari $\beta^*_{(t)}$ merupakan nilai taksiran parameter yang konvergen pada saat iterasi ke-*m*.

Jika belum mencapai estimasi parameter yang konvergen, maka pada langkah ke-2 dilakukan kembali sampai mencapai konvergen. Estimasi parameter yang konvergen diperoleh jika nilai $\left\|\beta^*_{(m+1)} - \beta^*_{(m)}\right\| < \varepsilon$, dimana ε lebih besar dari nol dan sangat kecil.

2.9.2 Pengujian Signifikansi Parameter Model GWNBR

Pengujian signifikan parameter model GWNBR terdiri atas uji serentak dan uji parsial.

1. Uji signifikansi secara serentak

   Uji signifikansi secara serentak menggunakan metode *Maximum Likelihood Ratio Test* (MLE) dengan hipotesis sebagai berikut:

   H_0 : $\beta_1(u_i, v_i) = \beta_2(u_i, v_i) = \cdots = \beta_k(u_i, v_i) = 0$

   H_1 : paling sedikit ada satu $\beta_k \neq 0, k = 1,2, \dots, p$

   Statistik uji yang digunakan adalah sebagai berikut:

   $$D(\hat{\beta}) = -2\ln(\Lambda) = -2\ln\left(\frac{L(\widehat{\omega})}{L(\widehat{\Omega})}\right) \quad (2.41)$$

   Kriteria Pengujian:

   Tolak H_0 jika nilai dari $D(\hat{\beta}) > X^2_{(k,a)}$ yang artinya minimal terdapat satu parameter dalam model regresi Binomial Negatif yang berpengaruh signifikan terhadap variabel respon.

2. Uji signifikansi secara parsial

   Pengujian secara parsial dilakukan untuk mengetahui parameter mana saja yang memberikan pengaruh signifikan terhadap variabel respon dengan hipotesis sebagai berikut.

H_0 : $\beta_k(u_i, v_i) = 0$

H_1 : minimal ada satu $\beta_k \neq 0, k = 1,2, \dots, p$

Statistik uji yang digunakan adalah sebagai berikut.

$$Z_{hitung} \frac{\overline{\beta}_k(u_i,v_i)}{SE\overline{\beta}_k(u_i,v_i)} \tag{2.42}$$

Kriteria Pengujian:

Tolak H_0 jika nilai dari $|Z_{hitung}| > Z_{\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$ yang artinya parameter tersebut berpengaruh signifikan terhadap di lokasi pada tiap lokasi.

2.10 Kriteria Kebaikan Model

Salah satu tujuan dalam analisis regresi adalah untuk mendapatkan model terbaik. Model terbaik adalah model yang mampu menjelaskan hubungan antara variabel predictor dengan variabel respon berdasarkan kriteria tertentu. Kriteria yang sering digunakan dalam pemilihan model terbaik adalah *R-Square* (R^2) dan AIC. Nilai R^2 diperoleh dari persamaan berikut.

$$R^2 = \left(\frac{SSR}{SST}\right) \times 100\% \tag{2.43}$$

dengan $SSR = \sum_{i=1}^{n}(\hat{y} - \bar{y})^2$ dan $SST = \sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2$

Jika nilai R^2 semakin besar maka model yang didapatkan semakin baik (Smith, 1996).

Akaike Information Criterion (AIC) adalah kriteria kesesuaian model dalam menduga model secara statistic. Kriteria AIC digunakan apabila pemodelan regresi bertujuan untuk mengidentifikasi faktor-faktor yang berpengaruh terhadap model. Besarnya nilai AIC sejalan dengan devians dari model. Semakin kecil nilai devians maka akan semakin kecil pula tingkat kesalahan yang dihasilkan model sehingga model yang diperoleh menjadi semakin tepat. Nilai devians akan semakin kecil apabila rasio antara fungsi *likelihood* dibawah H_0 dengan fungsi *likelihood* dibawah populasi semakin besar. Hal ini mengindikasikan bahwa parameter yang diuji semakin mendekati nilai parameter populasi yang sebenarnya, berarti dugaan model semakin baik. Oleh karena itu, model terbaik adalah model dengan AIC terkecil dan devians terkecil pula (Akaike, 1973). Nilai AIC dirumuskan sebagai berikut.

$$AIC = -2 \ln L(\hat{\beta}) + 2k \tag{2.44}$$

dimana $L(\hat{\beta})$ adalah *likelihood* dari masing-masing model yang dihitung, meliputi *likelihood* dari model GWGPR dan GWNBR, sedangkan k adalah jumlah parameter dalam model.

2.11 Jumlah Kematian Ibu

Menurut Utomo yang dikutip oleh Badan Pusat Statistik, Jumlah kematian ibu merupakan banyaknya kematian perempuan pada saat hamil atau selama 42 hari setelah berakhirnya kehamilan, yang disebabkan karena kehamilannya atau penanganannya, tetapi bukan disebabkan oleh kecelakaan. Informasi tentang jumlah kematian ibu bermanfaat untuk pengembangan kesehatan reproduksi, terutama pelayanan kehamilan dan membuat kehamilan yang aman bebas risiko tinggi, program peningkatan jumlah kelahiran yang dibantu oleh tenanga kesehatan, penyiapan sistem rujukan dalam penanganan komplikasi kehamilan, penyiapan keluarga dan suami siaga dalam menyongsong kelahiran, yang semuanya bertujuan untuk mengurangi jumlah kematian dan meningkatkan derajat kesehatan reproduksi. Jumlah kematian ibu mempengaruhi Angka Kematian Ibu (AKI). (BPS, 2017)

Angka kematian ibu meupakan salah satu indikator untuk melihat derajat kesehatan perempuan. Angka kematian ibu adalah salah satu tujuan MDGs untuk meningkatkan kesehatan ibu dengan mengurangi sampai $^{3}/_{4}$ resiko jumlah kematian ibu. Penyebab kematian yang sering muncul adalah pendarahan, keracunan kehamilan yang disertai kejang-kejang, aborsi dan infeksi. Faktor lain penyebab kematian ibu yaitu pemberdayaan perempuan yang tak begitu baik, sosial ekonomi keluarga seperti penduduk tidak mampu sehingga ibu hamil tidak mendapatkan pelayanan kesehatan dengan layak, lingkungan masyarakat seperti adat istiadat di perkotaan dan di pedesaan yang berbeda, dan politik . Kaum lelaki juga dituntut untuk ikut aktif dalam permasalahan bidang reproduksi ibu (STI&K, 2010).

2.12 Faktor-Faktor yang Mempengaruhinya

Jumlah kematian ibu merupakan penentu derajat kesehatan perempuan. Oleh karena itu diperlukan upaya untuk mengurangi jumlah kematian ibu dengan menganalisis faktor-faktor yang mempengaruhi jumlah kematian ibu. Menurut Dinas Kesehatan Provinsi Jawa Tengah faktor-faktor yang mempengaruhi jumlah kematian ibu di tiap daerah, diantaranya yaitu:

2.12.1 Persentase Ibu Hamil yang melaksanakan program K1

Cakupan K1 adalah banyak ibu hamil yang telah memperoleh pelayanan antenatal pertama kali oleh tenaga kesehatan dibandingkan jumlah sasaran ibu hamil di tiap kota atau kabupaten pada kurun waktu 1 tahun.

2.12.2 Persentase Ibu Hamil Mendapatkan Zat Besi Fe3

Ibu hamil yang mendapatkan tablet zat besi Fe3 adalah ibu hamil yang mendapatkan tablet zat besi sebanyak 90 tablet. Ibu hamil lebih rentan terkena anemia karena kekurangan zat besi dan menjadi salah satu penyebab kematian ibu yang fatal. Zat besi yang dibutuhkan ketika hamil lebih banyak dibandingkan kondisi seseorang yang tidak mengandung karena janin juga menyerap nutrisi dari ibu.

2.12.3 Persentase Ibu Hamil Mendapatkan Imunisasi Td2+

Infeksi tetanus merupakan salah satu penyebab kematian ibu. Kematian karena infeksi tetanus ini merupakan akibat dari proses persalinan yang tidak aman atau berasal dari luka yang diperoleh ibu hamil sebelum melahirkan. Sebagai upaya mengendalikan infeksi tetanusmaka dilaksanakan program imunisasi Tetanus Toksoid Difteri (Td) bagi wanita usia subur dan ibu hamil. Ibu hamil yang mendapatkan imunisasi Td2+ adalah ibu hamil yang mendapatkan imunisasi tetanus rutin oleh tenaga kesehatan.

2.12.4 Persentase Ibu Nifas Mendapatkan Vitamin A

Ibu nifas mendapatkan kapsul vitamin A adalah cakupan ibu nifas yang mendapatkan kapsul vitamin A dosis tinggi (200.000 SI) pada periode sebelum 40 hari setelah melahirkan.

2.12.5 Persentase Penanganan Komplikasi Kebidanan

Komplikasi kebidanan adalah kesakitan pada ibu hamil, ibu bersalin, ibu nifas yang dapat mengancam jiwa ibu dan bayi. Penanganan komplikasi kebidanan adalah pelayanan sesuai standar pada tingkat pelayanan dasar dan rujukan kepada ibu hamil, ibu bersalin dan ibu nifas yang mengalami komplikasi. Diperkirakan 20% ibu hamil akan mengalami komplikasi kebidanan. Komplikasi dalam kehamilan dan persalinan tidak selalu dapat diduga sebelumnya, oleh karenanya semua persalinan harus ditolong oleh tenaga kesehatan agar komplikasi kebidanan dapat segera dideteksi dan ditangani.

2.12.6 Persentase Peserta KB

Peraturan Pemerintah Republik Indonesia Nomor 87 Tahun 2014 tentang Perkembangan Kependudukan dan Pembangunan Keluarga, Keluarga Berencana dan Sistem Informasi Keluarga menyebutkan bahwa program keluarga berencana (KB) adalah upaya mengatur kelahiran anak, jarak, dan usia ideal melahirkan, mengatur kehamilan melalui promosi, perlindungan dan bantuan sesuai dengan hak reproduksi untuk mewujudkan keluarga yang berkualitas (Dinas Kesehatan Provinsi Jawa Tengah, 2019)

2.12.7 Jumlah Penduduk Miskin

Kemiskinan dipandang sebagai ketidakmampuan dari sisi ekonomi untuk memenuhi kebutuhan dasar makanan dan bukan makanan yang diukur dari sisi pengeluaran. Penduduk miskin adalah penduduk yang memiliki rata-rata pengeluaran perkapita perbulan dibawah garis kemiskinan (Dinas Kesehatan Provinsi Jawa Tengah, 2018).