BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Tinjauan Statistik

2.1.1 Analisis Deskriptif

Analisis deskriptif merupakan suatu teknik analisis yang dilakukan dengan metode pengumpulan, pengolahan, penyajian, serta analisis data kuantitatif secara deskriptif dalam bentuk tabel atau grafik. Analisis ini juga memberikan gambaran yang teratur mengenai suatu peristiwa (Dajan, 1986 dalam Andita, 2018). Menurut Utsman (2015), analisis deskriptif hanya digunakan untuk memberikan informasi mengenai data yang dimiliki tanpa bermaksud menguji atau membuat kesimpulan.

2.1.2 Distribusi *Poisson*

Menurut Walpole (1995), distribusi *Poisson* merupakan suatu distribusi untuk peristiwa yang memiliki peluang kejadian kecil, di mana tergantung pada selang waktu tertentu, hanya berupa panjangnya saja, seperti semenit, sehari, seminggu, sebulan, bahkan setahun, serta daerah tertentu yang berupa suatu garis, luasan, volume, atau sepotong bahan (Islamiyah, 2020). Hasil pengamatannya berupa variabel diskrit dan saling independen antar variabel prediktor. Beberapa ciri yang dimiliki distribusi *Poisson*, di antaranya (Nuraeni, 2018):

1. Banyaknya kejadian yang terjadi dalam selang waktu atau daerah tertentu tidak tergantung pada banyaknya hasil percobaan pada selang waktu atau daerah lain yang terpisah.

2. Peluang kejadian satu hasil percobaan dalam selang waktu yang singkat atau daerah yang kecil, sebanding dengan panjang selang waktu atau besarnya daerah tersebut.
3. Peluang kejadian lebih dari satu hasil percobaan dalam selang waktu yang singkat atau daerah yang kecil dapat diabaikan.

Adapun fungsi peluang untuk data berdistribusi *Poisson*, di mana bergantung pada parameter tunggal, yaitu rataan μ, adalah sebagai berikut:

$$f(y;\mu) = \frac{e^{-\mu}\mu^{y}}{y!}, untuk\ y = 0,1,2,\dots, dan\ \mu > 0$$

2.1.3 Distribusi *Poisson Invers Gaussian*

Distribusi *Inverse Gaussian* merupakan distribusi kontinu yang memiliki kemencengan lebih besar serta keruncingan yang tajam. Oleh karena itu, distribusi ini digunakan dalam data cacahan yang menceng ke kanan serta memiliki ekor yang sedikit lebih panjang. Stasinopoulus dan Rigby (2007) menyatakan bahwa sebagian besar penelitian dengan data cacahan menggunakan model *Poisson Inverse Gaussian* karena fungsi *Likelihood* dalam distribusi ini berbentuk *close form* dan penghitungannya lebih mudah (Widiari, 2016). Menurut Herindrawati, dkk. (2017), distribusi *Poisson Inverse Gaussian* merupakan salah satu distribusi *Poisson* campuran yang ditentukan oleh dua parameter, yaitu rata-rata atau μ sebagai parameter lokasi dan parameter *disperse* atau τ sebagai parameter bentuk, di mana kedua parameter tersebut dapat dituliskan sebagai berikut:

$$P(Y = y|\mu) = \frac{\mu^{y} e^{\frac{1}{\tau}}}{y!}\left(\frac{2}{\pi\tau}\right)^{\frac{1}{2}}(2\mu\tau + 1)^{\left(-\frac{y-\frac{1}{2}}{2}\right)} K_{y-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{\tau}\sqrt{2\mu\tau + 1}\right)$$

Rata-rata distribusi *Poisson Invers Gaussian*, yaitu:

$$E(Y) = E\{E(Y|\mu v)\} = E(\mu v) = \mu$$

Variansi untuk distribusi *Poisson Invers Gaussian*, yaitu:

$$Var(Y) = Var\{E(Y|\mu v)\} + E\{Var(Y|\mu v)\} = \mu + \tau\mu^2$$

di mana:

Y: banyaknya kejadian dalam kurun waktu tertentu,

v : distribusi pada random efek,

μ : rata-rata,

τ : parameter dispersi,

$K_{y-\frac{1}{2}}(\frac{1}{\tau}\sqrt{2\mu\tau + 1})$: fungsi Besel modifikasi jenis ketiga (Willmott, 1987).

2.1.4 Uji *Overdispersi*

Pada regresi *Poisson*, salah satu asumsi yang harus dipenuhi adalah asumsi kesamaan antara rata-rata (*mean*) dan variansinya (*variance*) atau yang disebut dengan *equidispersi* (Darnah, 2011). Dalam analisis data statistika, data yang memiliki varians lebih kecil dari rataannya disebut dengan *underdispersi*, sedangkan data yang variansinya lebih besar dari rataannya disebut dengan *overdispersi*. Menurut Kusuma, dkk. (2013), salah satu penyebab *overdispersi* adalah adanya nilai nol yang terlalu banyak (*excess zero*) pada variabel respons.

Adanya *underdispersi* atau *overdispersi* menyebabkan taksiran parameter yang diperoleh tidak efisien, sehingga berakibat fatal dalam interpretasi model karena dapat memberikan kesimpulan yang keliru tentang signifikan atau tidaknya parameter regresi yang terlibat akibat rendahnya taksiran *standard error* (Darnah, 2011). Untuk menguji ada tidaknya *overdispersi* dapat menggunakan package AER dari *software* R (Herindrawati, dkk., 2017). Selain itu, juga dapat dideteksi dengan melihat nilai dari *variance test* (VT), yaitu sebagai berikut (Widiari, 2016):

$$VT = \sum_{i=1}^{n} \frac{(y_i - \bar{y})^2}{\bar{y}} = (n-1)\frac{S^2}{\bar{y}}$$

di mana:

n : banyaknya sampel,

S^2 : varians,

$\bar{y}$: rata-rata.

Nilai di atas juga disebut sebagai indeks dispersi karena sama dengan rasio varians terhadap rata-rata (*variance-to-mean ratio*). *Underdispersi* terjadi jika nilainya kurang dari 1, sedangkan *overdispersi* terjadi bila nilainya lebih besar dari 1 (Karlis dan Xekalaki, 2000). *Overdispersi* dapat ditulis dengan:

$$Var(Y) > E(Y)$$

Hipotesis dalam uji *overdispersi*, yaitu:

H_0 = Tidak terjadi *overdispersi*.

H_1 = Terjadi *overdispersi*.

Keputusan yang diambil untuk uji *overdispersi*, yaitu jika nilai $p-value$ < α maka H_0 ditolak atau dapat disimpulkan bahwa terjadi *overdispersi*. Sebaliknya, apabila $p-value$ > α, maka H_0 diterima, atau dapat disimpulkan bahwa tidak terjadi *overdispersi*.

2.1.5 Regresi *Poisson Inverse Gaussian*

Model regresi *Poisson Inverse Gaussian* memiliki fungsi kepadatan peluang sebagai berikut (Nuraeni, 2018):

$$P(Y=y|\boldsymbol{x_i};\boldsymbol{\beta};\tau)=\left\{\frac{e^{x_i^\tau \boldsymbol{\beta}} y_i e^{1/\tau}}{y_i!}\left(\frac{2}{\pi\tau}\right)^{\frac{1}{2}}\left(2^{x_i^T\boldsymbol{\beta}}\tau+1\right)^{-\frac{\left(y_i-\frac{1}{2}\right)}{2}} K_{si}(Z_i)\right\}$$

di mana:

Y : banyaknya kejadian dalam kurun waktu tertentu,

$\boldsymbol{x_i^\tau}$: $[1 \quad x_{1i} \quad x_{2i} \quad \dots \quad x_{ki}]$,

$\boldsymbol{\beta}$: $[\beta_0 \quad \beta_1 \quad \beta_2 \quad \dots \quad \beta_k]^\tau$,

τ : parameter dispersi,

$K_{si}(Z_i)$: fungsi Besel modifikasi jenis ketiga (Willmott, 1987).

Persamaan di atas ditaksir dengan metode *Maximum Likelihood* yang merupakan model dan parameter $\boldsymbol{\beta}$ pada regresi *Poisson Inverse Gaussian*. Fungsi *Likelihood* dari distribusi *Poisson Inverse Gaussian*, yaitu (Nuraeni, 2018):

$$L(\boldsymbol{\beta};\tau)=\prod_{i=1}^{n} P(Y=y_i|\boldsymbol{x_i};\boldsymbol{\beta};\tau)$$

$$L(\boldsymbol{\beta};\tau)=\prod_{i=1}^{n}\left\{\frac{e^{x_i^\tau \boldsymbol{\beta}} y_i e^{1/\tau}}{y_i!}\left(\frac{2}{\pi\tau}\right)^{\frac{1}{2}}\left(2^{x_i^T\boldsymbol{\beta}}\tau+1\right)^{-\frac{\left(y_i-\frac{1}{2}\right)}{2}} K_{si}(Z_i)\right\}$$

Fungsi tersebut diubah ke dalam bentuk logaritma natural (ln) sehingga persamaan yang diperoleh:

$$L(\boldsymbol{\beta};\tau)=lnL(\boldsymbol{\beta};\tau)$$

$$L(\boldsymbol{\beta};\tau)=\sum_{i=1}^{n} y_i\,\boldsymbol{x}_i^T\boldsymbol{\beta}+\frac{n}{\tau}-\ln(\sum_{i=1}^{n} y_i t)+\frac{n}{2}\ln\left(\frac{2}{\pi}\right)-\left(\frac{n}{2}\right)ln\tau$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{2y_i-1}{4}\right)\ln(2\boldsymbol{x}_i^{\tau}\boldsymbol{\beta}+1)+\sum_{i=1}^{n} lnK_{s_i}(Z_i)$$

Setelah itu, ditentukan turunan pertama dan kedua terhadap parameter $\boldsymbol{\beta}$ dan τ.

$$\frac{\partial l}{\partial\boldsymbol{\beta}}=\frac{\partial\sum_{i=1}^{n} y_i\boldsymbol{x}_i^{\tau}\boldsymbol{\beta}+\frac{n}{\tau}-\ln(\sum_{i=1}^{n} y_i!)+\frac{n}{2}\ln\left(\frac{2}{\pi}\right)-\frac{n}{2}\,ln\,\tau}{\partial\boldsymbol{\beta}}$$

$$-\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{2y_i-1}{4}\right)\ln(2\boldsymbol{x}_i^{\tau}\boldsymbol{\beta}+1)+\sum_{i=1}^{n}\ln K_{s_i}(z_i)}{\partial\boldsymbol{\beta}}$$

$$=\sum_{i=1}^{n} y_i\boldsymbol{x}_i^{\tau}-\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{2y_i-1}{4}\right)\frac{1}{(2\boldsymbol{x}_i^{\tau}\boldsymbol{\beta}+1)}2x_i^{\tau}$$

Turunan kedua dari parameter $\boldsymbol{\beta}$, yaitu $\frac{\partial^2 l}{\partial\boldsymbol{\beta}^T\partial\boldsymbol{\beta}}=\frac{\partial\left(\frac{\partial l}{\partial\beta}\right)}{\partial\boldsymbol{\beta}}$, sedangkan turunan kedua dari parameter τ, yaitu $\frac{\partial^2 l}{\partial\boldsymbol{\beta}\partial\tau}=\frac{\partial\left(\frac{\partial l}{\partial\beta}\right)}{\partial\tau}$.

$$\frac{\partial l}{\partial\tau}=\frac{\partial\sum_{i=1}^{n} y_i\boldsymbol{x}_i^{\tau}\boldsymbol{\beta}+\frac{n}{\tau}-\ln(\sum_{i=1}^{n} y_i!)+\frac{n}{2}\ln\left(\frac{2}{\pi}\right)-\frac{n}{2}\,ln\,\tau}{\partial\tau}$$

$$-\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{2y_i-1}{4}\right)\ln(2\boldsymbol{x}_i^{\tau}\boldsymbol{\beta}+1)+\sum_{i=1}^{n}\ln K_{s_i}(z_i)}{\partial\tau}$$

$$=-\frac{n}{\tau^2}-\frac{n}{2\tau}=0$$

Adapun turunan kedua dari parameter τ pada persamaan di atas, yaitu $\frac{\partial^2 l}{\partial\tau^2}=\frac{\partial\left(\frac{\partial l}{\partial\tau}\right)}{\partial\tau}$.

Jika persamaan hasil turunan ternyata implisit dan nonlinear dalam parameter

$\boldsymbol{\beta}$ dan τ, maka untuk mendapatkan taksiran dari parameter $\boldsymbol{\theta} = [\boldsymbol{\beta}^{\tau} \quad \tau]^T$, fungsi dimaksimumkan menggunakan *Fisher Scoring Algorithm* dengan persamaan berikut (Nuraeni, 2018):

$$\widehat{\boldsymbol{\theta}}_{(r+1)} = \widehat{\boldsymbol{\theta}}_{(r)} + \boldsymbol{I}^{-1}(\widehat{\boldsymbol{\theta}}_{(m)})\boldsymbol{D}(\widehat{\boldsymbol{\theta}}_{(m)})$$

di mana:

$\widehat{\boldsymbol{\theta}}$: taksiran parameter $(\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{\tau}, \hat{\tau})^T$,

$\boldsymbol{D}(\widehat{\boldsymbol{\theta}})$: vektor gradien dengan $\boldsymbol{D}(\widehat{\boldsymbol{\theta}}) = \frac{\partial l}{\partial \hat{\tau}}, \frac{\partial l}{\partial \widehat{\boldsymbol{\beta}}^T}$,

$\boldsymbol{I}(\widehat{\boldsymbol{\theta}}_{(m)})$: matriks informasi Fisher dengan $\boldsymbol{I}(\widehat{\boldsymbol{\theta}}_{(m)}) = -E[\boldsymbol{H}(\widehat{\boldsymbol{\theta}}_{(m)})]$,

$\boldsymbol{H}(\widehat{\boldsymbol{\theta}}_{(0)})$: matriks Hessian (matriks yang berisi turunan kedua dari fungsi *Likelihood* terhadap parameter $\boldsymbol{\beta}$ dan τ),

$\widehat{\boldsymbol{\theta}}_{(m)}$: kumpulan penaksir parameter yang konvergen saat iterasi ke-m.

2.1.6 Pengujian Hipotesis Regresi *Poisson Inverse Gaussian*

Uji hipotesis pada regresi *Poisson Inverse Gaussian* dapat dilakukan dengan uji serentak (*overall)* dan uji parsial.

2.1.6.1 Uji Serentak

Uji serentak atau uji *overall* merupakan uji yang dilakukan untuk melihat pengaruh semua variabel secara bersama-sama.

Hipotesis dalam uji serentak, yaitu:

$H_0: \beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_k = 0$

$H_1: Minimal\ terdapat\ satu\ \beta_i \neq 0\ dengan\ i = 1,2, \ldots, k$

Statistik uji yang digunakan merupakan *Likelihood ratio* yang diperoleh dengan menentukan himpunan parameter di bawah populasi dan himpunan parameter di bawah H_0 benar. Himpunan parameter di bawah populasi dibentuk dengan fungsi *Likelihood* untuk model penuh (*saturated*) yang melibatkan seluruh variabel prediktor, yaitu (Nuraeni, 2018):

$$L(\widehat{\Omega}) = \prod_{i=1}^{n} \left\{ \frac{\left(e^{x_i^\tau \widehat{\boldsymbol{\beta}}}\right)^{y_i} e^{\frac{1}{\tau}}}{y_i!} \left(\frac{2}{\pi\hat{\tau}}\right)^{\frac{1}{2}} \left(2\left(\left(e^{x_i^\tau \widehat{\boldsymbol{\beta}}}\right)\hat{\tau} + 1\right)^{\frac{\left(y_i - \frac{1}{2}\right)}{2}} K_{si}(z_i) \right) \right\}$$

$$ln\left(L(\hat{\Omega})\right) = \sum_{i=1}^{n} y_i\, \boldsymbol{x}_i^{\boldsymbol{\tau}} \widehat{\boldsymbol{\beta}} + \frac{n}{\tau} - \ln\left(\sum_{i=1}^{n} y_i!\right) + \frac{n}{2}\ln\left(\frac{2}{\pi}\right) - \left(\frac{n}{2}\right) ln\hat{\tau}$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{2y_i - 1}{4}\right)\ln\left(2\boldsymbol{x}_i^{\boldsymbol{\tau}}\widehat{\boldsymbol{\beta}}\hat{\tau} + 1\right) + \sum_{i=1}^{n} lnK_{s_i}(Z_i)$$

di mana:

$L(\Omega)$: model dengan melibatkan seluruh variabel prediktor,

$\boldsymbol{\beta}, \tau$: pendugaan parameter untuk populasi.

Adapun himpunan parameter di bawah H_0 benar yang dibentuk dengan fungsi *Likelihood* untuk model yang tidak melibatkan variabel prediktor, yaitu (Nuraeni, 2018):

$$L(\widehat{\omega}) = \prod_{i=1}^{n} \left\{ \frac{\left(e^{\widehat{\beta}_0}\right)^{y_i} e^{\frac{1}{\tau}}}{y_i!} \left(\frac{2}{\pi\hat{\tau}_\omega}\right)^{\frac{1}{2}} \left(2\left(\left(e^{e\beta_0}\right)\hat{\tau}_\omega + 1\right)^{\frac{\left(y_i - \frac{1}{2}\right)}{2}} K_{si}(z_i) \right) \right\}$$

$$ln\left(L(\widehat{\omega})\right) = \sum_{i=1}^{n} y_i\, \boldsymbol{x}_i^{\boldsymbol{T}} \hat{\beta}_0 + \frac{n}{\hat{\tau}_\omega} - \ln(\sum_{i=1}^{n} y_i!) + \frac{n}{2}\ln\left(\frac{2}{\pi}\right) - \left(\frac{n}{2}\right) ln\hat{\tau}_\omega$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{2y_i - 1}{4}\right)\ln\left(2\boldsymbol{x}_i^{\boldsymbol{\tau}}\hat{\beta}_0\hat{\tau}_\omega + 1\right) + \sum_{i=1}^{n} lnK_{s_i}(Z_i)$$

di mana:

$L(\omega)$: model tanpa melibatkan variabel prediktor,

$\hat{\beta}_0, \hat{\tau}_\omega$: pendugaan parameter untuk H_0 benar.

Kedua fungsi di atas dibandingkan dalam bentuk devians, sehingga diperoleh:

$$G = -2\ln\left(\frac{L(\hat{\Omega})}{L(\hat{\omega})}\right) = 2\left(\ln L(\hat{\Omega}) - \ln L(\hat{\omega})\right)$$

Statistik G memiliki derajat bebas v yang diperoleh dari selisih dari parameter di bawah populasi dengan parameter di bawah H_0, di mana G merupakan pendekatan dari distribusi *chi-square*. Kriteria penolakannya adalah H_0 ditolak jika $G_{hitung} > x^2_{(\alpha,v)}$.

2.1.6.2 Uji Parsial

Uji parsial merupakan uji yang dilakukan untuk melihat pengaruh setiap variabel independen terhadap variabel dependen secara parsial (sendiri-sendiri).

Hipotesis dalam uji parsial, yaitu:

$H_0: \beta_j = 0, j = 1,2,\ldots,k$ (Variabel bebas berpengaruh secara signifikan terhadap variabel terikat).

$H_1: \beta_j \neq 0, j = 1,2,\ldots,k$ (Variabel bebas tidak berpengaruh secara signifikan terhadap variabel terikat).

Adapun statistik uji dalam uji parsial, yaitu (Nuraeni, 2018):

$$Z = \frac{\hat{\beta}_j}{SE(\hat{\beta}_j)}$$

Kriteria penolakannya adalah H_0 ditolak jika $|Z_{hit}| > Z_{\frac{\alpha}{2}}$ atau *p-value* < α,

di mana:

α : tingkat signifikan yang digunakan,

$\hat{\beta}_j$: estimasi parameter ke-j,

$SE(\hat{\beta}_j)$: elemen diagonal utama ke-(m+2) dari matriks varians dan covarians yang diperoleh dari:

$$\widehat{Cov}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) = -\left(\boldsymbol{H}^{-1}(\hat{\boldsymbol{\theta}})\right)$$

dengan **H** merupakan matriks proyeksi, yaitu $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'$, sehingga simetris dan idempoten ($\boldsymbol{H}^2 = \boldsymbol{H}$). Sedangkan hipotesis untuk parameter τ, yaitu:

H_0: $\tau = 0$ (Variabel bebas berpengaruh secara signifikan terhadap variabel terikat).

H_1: $\tau \neq 0$ (Variabel bebas tidak berpengaruh secara signifikan terhadap variabel terikat).

Statistik uji yang digunakan, yaitu (Nuraeni, 2018):

$$Z = \frac{\hat{\tau}}{SE(\hat{\tau})}$$

di mana H_0 ditolak jika $|Z_{hit}| > Z_{\frac{\alpha}{2}}$ atau *p-value* < α.

2.1.7 Definisi Multikolinieritas

Multikolinieritas pertama kali diperkenalkan oleh Ragner Frisch, yaitu hubungan linier yang sangat tinggi pada model regresi di setiap variabel bebasnya. Terjadinya multikolinieritas dapat menyebabkan pemakaian metode regresi menjadi kurang tepat karena taksiran regresinya tidak stabil dan variabel koefisien regresinya sangat besar. Data dikatakan terdapat kolinieritas tinggi apabila nilai VIF yang dihasilkan lebih besar dari 10,00 di mana dapat dicari menggunakan rumus:

$$VIF = \frac{1}{1 - R_j^2}$$

di mana R_j^2 merupakan koefisien determinasi yang diperoleh dengan meregresikan antara variabel bebas yang satu dengan yang lainnya (Nuraeni, 2018).

2.1.8 *Akaike's Information Criterion*

Kriteria pemilihan model terbaik dapat dilihat melalui nilai *Akaike's Information Criterion* (AIC) yang ditemukan oleh Akaike (Fathurahman, 2010). Model terbaik ditentukan berdasarkan nilai *Akaike's Information Criterion* yang paling kecil. Adapun rumus untuk mencari nilai *Akaike's Information Criterion* adalah sebagai berikut:

$$AIC = -2\ log\ (L(\hat{\theta}|y))\ + 2k$$

di mana:

$L(\hat{\theta}|y))$:estimasi fungsi *Likelihood* parameter,

k : jumlah parameter yang diestimasi.

2.1.9 *Ridge Regression*

Regresi *Ridge* dikemukakan oleh Hoerl dan Kennard (1970), yang mana digunakan untuk mengatasi korelasi tinggi pada beberapa peubah bebas dalam model sehingga menyebabkan nilai dugaan parameter menjadi tidak stabil (Antono, 2019). Estimasi *Ridge* untuk koefisien regresi dapat diperoleh dengan menambahkan tetapan bias *k* regresi *Ridge* yang relatif kecil pada diagonal utama matriks korelasi $\boldsymbol{X^T X}$, sehingga koefisien estimator regresi *Ridge* dipenuhi dengan besarnya tetapan bias *k*.

Pada metode regresi *Ridge*, nilai variabel *regressor*-nya ditransformasikan terlebih dahulu melalui prosedur *centering and scaling*. Tujuannya adalah untuk mempermudah analisis data yang memiliki satuan berbeda-beda. Pada regresi *Poisson*, variabel respons berupa data diskrit non-negatif, sehingga metode *centering and scaling* hanya dilakukan pada variabel prediktor saja. Antono (2019) juga menyatakan bahwa estimator dalam regresi *Ridge* menggunakan pengganda *Langrange*, di mana $\widehat{\boldsymbol{\beta}}\boldsymbol{*}$ memiliki syarat $\widehat{\boldsymbol{\beta}}\boldsymbol{*}'\widehat{\boldsymbol{\beta}}\boldsymbol{*} \leq c^2$ untuk meminimumkan fungsi tujuan.

$F \equiv \left(\boldsymbol{Y}^* - \boldsymbol{X}^*\widehat{\boldsymbol{\beta}}^*\right)'\left(\boldsymbol{Y}^* - \boldsymbol{X}^*\widehat{\boldsymbol{\beta}}^*\right) + k(\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{*\prime}\widehat{\boldsymbol{\beta}}^* - c^2)$

$F \equiv \left(\boldsymbol{Y}^{*\prime} - \widehat{\boldsymbol{\beta}}^{*\prime}\boldsymbol{X}^{*\prime}\right)\left(\boldsymbol{Y}^* - \boldsymbol{X}^*\widehat{\boldsymbol{\beta}}^*\right) + k(\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{*\prime}\widehat{\boldsymbol{\beta}}^* - c^2)$

$F \equiv \boldsymbol{Y}^{*\prime}\boldsymbol{Y}^* - \boldsymbol{Y}'\boldsymbol{X}^*\widehat{\boldsymbol{\beta}}^* - \widehat{\boldsymbol{\beta}}^{*\prime}\boldsymbol{X}^{*\prime}\boldsymbol{Y}^* + \widehat{\boldsymbol{\beta}}^{*\prime}\boldsymbol{X}^{*\prime}\boldsymbol{X}^*\widehat{\boldsymbol{\beta}}^* + k(\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{*\prime}\widehat{\boldsymbol{\beta}}^* - c^2)$

$\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{*\prime}\boldsymbol{X}^{*\prime}\boldsymbol{Y}^*$ merupakan skalar, maka dengan menggunakan sifat *transpose* $\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{*\prime}\boldsymbol{X}^{*\prime}\boldsymbol{Y}^* = \boldsymbol{Y}'\boldsymbol{X}^*\widehat{\boldsymbol{\beta}}^*$ diperoleh:

$F \equiv \boldsymbol{Y}^{*\prime}\boldsymbol{Y}^* - \widehat{\boldsymbol{\beta}}^{*\prime}\boldsymbol{X}^{*\prime}\boldsymbol{Y}^* - \widehat{\boldsymbol{\beta}}^{*\prime}\boldsymbol{X}^{*\prime}\boldsymbol{Y}^* + \widehat{\boldsymbol{\beta}}^{*\prime}\boldsymbol{X}^{*\prime}\boldsymbol{X}^*\widehat{\boldsymbol{\beta}}^* + k(\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{*\prime}\widehat{\boldsymbol{\beta}}^* - c^2)$

$F \equiv \boldsymbol{Y}^{*\prime}\boldsymbol{Y}^* - 2\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{*\prime}\boldsymbol{X}^{*\prime}\boldsymbol{Y}^* + \widehat{\boldsymbol{\beta}}^{*\prime}\boldsymbol{X}^{*\prime}\boldsymbol{X}^*\widehat{\boldsymbol{\beta}}^* + k(\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{*\prime}\widehat{\boldsymbol{\beta}}^* - c^2)$

Nilai F minimum jika $\frac{\partial F}{\partial \widehat{\boldsymbol{\beta}}^*} = 0$, maka:

$$0 = -2\boldsymbol{X}^{*\prime}\boldsymbol{Y}^* + 2\boldsymbol{X}^{*\prime}\boldsymbol{X}^*\widehat{\boldsymbol{\beta}}^* + 2k\boldsymbol{I}\widehat{\boldsymbol{\beta}}^*$$

$$0 = -\boldsymbol{X}^{*\prime}\boldsymbol{Y}^* + \widehat{\boldsymbol{\beta}}^*\left(\boldsymbol{X}^{*\prime}\boldsymbol{X}^* + k\boldsymbol{I}\right)$$

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}}^*\left(\boldsymbol{X}^{*\prime}\boldsymbol{X}^* + k\boldsymbol{I}\right) = \boldsymbol{X}^{*\prime}\boldsymbol{Y}^*$$

sehingga diperoleh estimator untuk regresi *Ridge*, yaitu:

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}}^* = \left(\boldsymbol{X}^{*\prime}\boldsymbol{X}^* + k\boldsymbol{I}\right)^{-1}\boldsymbol{X}^{*\prime}\boldsymbol{Y}^*$$

di mana:

$\widehat{\boldsymbol{\beta}}$: penduga kuadrat terkecil dari $\boldsymbol{\beta}$,

$\widehat{\boldsymbol{\beta}}^*$: penduga bias dari $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$,

$\boldsymbol{Y}^*$: vektor peubah tak bebas berukuran (n x 1),

$\boldsymbol{X}^*$: matriks peubah bebas berukuran (n x p),

$\boldsymbol{I}$: matriks identitas,

c : nilai tetapan bias,

k : parameter bias dengan nilai k sama untuk setiap peubah bebas.

2.1.10 *Modified Jackknifed Poisson Ridge Regression*

Metode *Jackknife* pertama kali diperkenalkan Hinkley (1977). Metode ini merupakan pengembangan dari metode *Generalized Ridge Regression*. Estimator dalam metode *Modified Jackknifed Poisson Ridge Regression* diperoleh melalui gabungan dari metode *Poisson Ridge Regression* ke dalam metode *Jackknifed Poisson Ridge Regression* (Munawaroh, 2018).

Estimator *Modified Jackknifed Poisson Ridge Regression* diperoleh dengan mengikuti penelitian Singh, dkk. (Munawaroh, 2018) menggunakan matriks **G** berukuran p x p dengan elemen vektor eigen dari $\boldsymbol{X^T\widehat{W}X}$ dan $\boldsymbol{\Lambda_{PRR}}$ yang merupakan matriks diagonal $\lambda_{1PR}, \dots, \lambda_{pPR}$ pada *Poisson Ridge Regression*, sehingga:

$$\boldsymbol{\Lambda_{PRR}} = \boldsymbol{G^T X^T \widehat{W} X G}$$

$$\boldsymbol{\Lambda_{PRR}} = (\boldsymbol{XG})^{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{\widehat{W}} (\boldsymbol{XG})$$

$$\boldsymbol{\Lambda_{PRR}} = \boldsymbol{Z^T \widehat{W} Z}$$

dengan **Z=XG**, maka diperoleh estimator *Modified Jackknifed Poisson Ridge Regression*:

$$\begin{aligned}\widehat{\boldsymbol{\gamma}}_{\boldsymbol{MJPR}} &= (\boldsymbol{I} + k(\boldsymbol{B})^{-1})\widehat{\boldsymbol{\gamma}}_{\boldsymbol{PRR}} \\ &= (\boldsymbol{I} + k(\boldsymbol{B})^{-1})(\boldsymbol{I} - \left(\boldsymbol{Z^T \widehat{W} Z} + k\boldsymbol{I}\right)^{-1} k)\widehat{\boldsymbol{\gamma}}_{\boldsymbol{ML}}\end{aligned}$$

$$= \left(\boldsymbol{I} - \left(k\left(\boldsymbol{Z}^{\boldsymbol{T}}\widehat{\boldsymbol{W}}\boldsymbol{Z} + k\boldsymbol{I}\right)^{-1}\right)^{\mathbf{2}}\right)\widehat{\boldsymbol{\gamma}}_{\boldsymbol{ML}}$$

$$= \left(\boldsymbol{I} - \left(k\left(\boldsymbol{Z}^{\boldsymbol{T}}\widehat{\boldsymbol{W}}\boldsymbol{Z} + k\boldsymbol{I}\right)^{-1}\right)^{\mathbf{2}}\right)\widehat{\boldsymbol{\gamma}}_{\boldsymbol{PRR}}$$

$$= (\boldsymbol{I} - \left(k^2\left(\boldsymbol{Z}^{\boldsymbol{T}}\widehat{\boldsymbol{W}}\boldsymbol{Z} + k\boldsymbol{I}\right)^{-2}\right)\widehat{\boldsymbol{\gamma}}_{\boldsymbol{PRR}}$$

$$= (\boldsymbol{I} - \left(k^2\left(\boldsymbol{Z}^{\boldsymbol{T}}\widehat{\boldsymbol{W}}\boldsymbol{Z} + k\boldsymbol{I}\right)^{-2}\right)(\boldsymbol{\Lambda}_{\boldsymbol{PRR}} + k\boldsymbol{I})^{-1}\boldsymbol{\Lambda}_{\boldsymbol{PRR}}\widehat{\boldsymbol{\gamma}}_{\boldsymbol{PRR}}$$

$$= \left(\boldsymbol{I} - k^2\left(\boldsymbol{Z}^{\boldsymbol{T}}\widehat{\boldsymbol{W}}\boldsymbol{Z} + k\boldsymbol{I}\right)^{-2}\right)(-\boldsymbol{k}(\boldsymbol{\Lambda}_{\boldsymbol{PRR}} + k\boldsymbol{I})^{-1})\widehat{\boldsymbol{\gamma}}_{\boldsymbol{ML}}$$

$$= (\boldsymbol{I} - k^2(\boldsymbol{B})^{-2})(\boldsymbol{I} - k\boldsymbol{B}^{-1})\widehat{\boldsymbol{\gamma}}_{\boldsymbol{ML}}$$

dengan $\widehat{\boldsymbol{\gamma}}_{\boldsymbol{PRR}} = \left(\boldsymbol{Z}^{\boldsymbol{T}}\widehat{\boldsymbol{W}}\boldsymbol{Z} + k\boldsymbol{I}\right)^{-1}\boldsymbol{Z}^{\boldsymbol{T}}\widehat{\boldsymbol{W}}\widehat{\boldsymbol{s}}$, di mana:

$\boldsymbol{I}$: matriks identitas,

k : konstanta bias,

B : $\boldsymbol{\Lambda}_{\boldsymbol{PRR}} + k\boldsymbol{I}$,

W : matriks diagonal $\boldsymbol{\mu} = (\boldsymbol{X}\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{\boldsymbol{ML}})$,

$\widehat{\boldsymbol{\gamma}}_{\boldsymbol{ML}}$: penduga parameter *Maximum Likelihood*,

$\widehat{\boldsymbol{\gamma}}_{\boldsymbol{PRR}}$: penduga parameter *Poisson Ridge Regression*.

Adapun variansi untuk *Modified Jackknifed Poisson Ridge Regression* (Munawaroh, 2018):

$$\boldsymbol{Var}(\widehat{\boldsymbol{\gamma}}_{\boldsymbol{MJPR}}) = E\left[\left(\widehat{\boldsymbol{\gamma}}_{\boldsymbol{MJPR}} - E(\widehat{\boldsymbol{\gamma}}_{\boldsymbol{MJPR}})\right)^T\left(\widehat{\boldsymbol{\gamma}}_{\boldsymbol{MJPR}} - E(\widehat{\boldsymbol{\gamma}}_{\boldsymbol{MJPR}})\right)\right]$$

$$= E[\left((\boldsymbol{I} - k^2\boldsymbol{B}^{-\mathbf{2}})(\boldsymbol{I} - k\boldsymbol{B}^{-\mathbf{1}})\widehat{\boldsymbol{\gamma}}_{\boldsymbol{ML}}\right)$$

$$-E\left((\boldsymbol{I} - k^2\boldsymbol{B}^{-\mathbf{2}})(\boldsymbol{I} - k\boldsymbol{B}^{-\mathbf{1}})\widehat{\boldsymbol{\gamma}}_{\boldsymbol{ML}}\right)^T\left((\boldsymbol{I} - k^2\boldsymbol{B}^{-\mathbf{2}})(\boldsymbol{I} - k\boldsymbol{B}^{-\mathbf{1}})\widehat{\boldsymbol{\gamma}}_{\boldsymbol{ML}}\right)$$

$$-E\left((\boldsymbol{I} - k^2\boldsymbol{B}^{-\mathbf{2}})(\boldsymbol{I} - k\boldsymbol{B}^{-\mathbf{1}})\widehat{\boldsymbol{\gamma}}_{\boldsymbol{ML}}\right)$$

$$= (\boldsymbol{I} - k^2\boldsymbol{B}^{-\mathbf{2}})(\boldsymbol{I} - k\boldsymbol{B}^{-\mathbf{1}})\boldsymbol{\Lambda}_{\boldsymbol{PRR}}^{-\mathbf{1}}(\boldsymbol{I} - k\boldsymbol{B}^{-\mathbf{1}})(\boldsymbol{I} - k^2\boldsymbol{B}^{-\mathbf{2}})$$

Bias dalam Estimator dari *Modified Jackknifed Poisson Ridge Regression* memiliki persamaan (Munawaroh, 2018):

$$\boldsymbol{Bias}(\hat{\boldsymbol{\gamma}}_{\boldsymbol{MJPR}}) = E(\hat{\boldsymbol{\gamma}}_{\boldsymbol{MJPR}}) - (\boldsymbol{\gamma})$$

$$= E\big((\boldsymbol{I} - k^2\boldsymbol{B}^{-2})(\boldsymbol{I} - k\boldsymbol{B}^{-1})\hat{\boldsymbol{\gamma}}_{\boldsymbol{ML}}\big) - (\boldsymbol{\gamma})$$

$$= \big((\boldsymbol{I} - k^2\boldsymbol{B}^{-2})(\boldsymbol{I} - k\boldsymbol{B}^{-1})\hat{\boldsymbol{\gamma}}_{\boldsymbol{ML}}\big)E(\hat{\boldsymbol{\gamma}}_{\boldsymbol{ML}}) - \boldsymbol{\gamma}$$

$$= \big[\big((\boldsymbol{I} - k^2\boldsymbol{B}^{-2})(\boldsymbol{I} - k\boldsymbol{B}^{-1})\hat{\boldsymbol{\gamma}}_{\boldsymbol{ML}}\big) - \boldsymbol{I}\big]\boldsymbol{\gamma}$$

$$= \big[[\boldsymbol{I} - k\boldsymbol{B}^{-1}] - (k^2\boldsymbol{B}^{-2})[\boldsymbol{I} - k\boldsymbol{B}^{-1}] - \boldsymbol{I}\big]\boldsymbol{\gamma}$$

$$= [k\boldsymbol{B}^{-1}(k\boldsymbol{B}^{-1})^{-1}[\boldsymbol{I} - k\boldsymbol{B}^{-1}] - k^2\boldsymbol{B}^{-2}[\boldsymbol{I} - k\boldsymbol{B}^{-1}] - \boldsymbol{I}]$$

$$= [k\boldsymbol{B}^{-1}(k\boldsymbol{B}^{-1})^{-1}[\boldsymbol{I} - k\boldsymbol{B}^{-1}]$$

$$-(k\boldsymbol{B}^{-1})(k\boldsymbol{B}^{-1})^{-1}[\boldsymbol{I} - k\boldsymbol{B}^{-1}]k^2\boldsymbol{B}^{-2} - k\boldsymbol{B}^{-1}(k\boldsymbol{B}^{-1})^{-1}$$

$$= k[(k\boldsymbol{B}^{-1})^{-1}[\boldsymbol{I} - k\boldsymbol{B}^{-1}]$$

$$-(k\boldsymbol{B}^{-1})^{-1}[\boldsymbol{I} - k\boldsymbol{B}^{-1}]k^2\boldsymbol{B}^{-2} - (k\boldsymbol{B}^{-1})^{-1}]\boldsymbol{B}^{-1}\,\boldsymbol{\gamma}$$

$$= k\left[-(k\boldsymbol{B}^{-1})^{-1}\big[\boldsymbol{I} - [\boldsymbol{I} - k\boldsymbol{B}^{-1}]\big] - (k\boldsymbol{B}^{-1})[\boldsymbol{I} - k\boldsymbol{B}^{-1}]\right]\boldsymbol{B}^{-1}\,\boldsymbol{\gamma}$$

$$= -k\left[(k\boldsymbol{B}^{-1})^{-1}\big[\boldsymbol{I} - [\boldsymbol{I} - k\boldsymbol{B}^{-1}]\big] + (k\boldsymbol{B}^{-1})[\boldsymbol{I} - k\boldsymbol{B}^{-1}]\right]\boldsymbol{B}^{-1}\,\boldsymbol{\gamma}$$

$$= -k[(k\boldsymbol{B}^{-1})^{-1}(k\boldsymbol{B}^{-1}) + (k\boldsymbol{B}^{-1})k\boldsymbol{B}^{-2}k]\boldsymbol{B}^{-1}\,\boldsymbol{\gamma}$$

$$= -k[\boldsymbol{I} + (k\boldsymbol{B}^{-1}) - k\boldsymbol{B}^{-2}k]\boldsymbol{B}^{-1}\,\boldsymbol{\gamma}$$

2.1.11 Parameter *Ridge k*

Masalah utama dalam penanganan multikolinieritas dalam analisis dengan regresi *Ridge* adalah penentuan nilai parameter. Beberapa parameter yang dapat diterapkan untuk estimator *Modified Jackknifed Poisson Ridge Regression* adalah (Munawaroh, 2018):

1. Schaeffer et. al, 1984

$$MJPR_1 = \hat{k}_1 = \frac{1}{\hat{\alpha}_{max}^2}$$

2. Alkhamisi et. al, 2006

$$MJPR_2 = \hat{k}_2 = median\ (\boldsymbol{s_i})$$

3. Kibria et. al, 2011

$$MJPR_3 = \hat{k}_3 = median\ (\boldsymbol{q_i})$$

$$MJPR_4 = \hat{k}_4 = max\ (\boldsymbol{q_i})$$

di mana:

$\hat{\alpha}_{max}^2$ = elemen maksimum dari $\boldsymbol{\delta^T \hat{\beta}_{ML}}$, $\boldsymbol{\delta^T}$ adalah *vector eigen* dari $\boldsymbol{X^T \widehat{W} X}$ dengan **W** merupakan matriks diagonal dari $\boldsymbol{\mu} = (\boldsymbol{X\hat{\beta}_{ML}})$,

$\boldsymbol{s_i} = \frac{\boldsymbol{\hat{t}_i \hat{\sigma}^2}}{\boldsymbol{(n-p)\hat{\sigma}^2 + t_i \hat{\alpha}_i^2}}$ dengan $\boldsymbol{t_i}$ adalah *vector eigen* dari matriks korelasi $\boldsymbol{X^T X}$,

$\boldsymbol{q_i} = \frac{\boldsymbol{\lambda_{max}}}{\boldsymbol{(n-p)\hat{\sigma}^2 + \lambda_{max} \hat{\alpha}_i^2}}$ dengan λ_{max} adalah *eigenvalue* maksimum dari $\boldsymbol{X^T \widehat{W} X}$,

$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (y_i \hat{\mu}_i)^2}{(n-p-1)}$ dengan p merupakan jumlah variabel prediktor,

$\boldsymbol{m_i} = \sqrt{\frac{\boldsymbol{\hat{\sigma}^2}}{\boldsymbol{\hat{\alpha}_i^2}}}$ dengan $\boldsymbol{\hat{\alpha}_i^2}$ adalah elemen ke-i dari $\boldsymbol{\delta^T \hat{\beta}_{ML}}$ di mana i=1, 2, ..., p.

2.2 Tinjauan Non Statistik

2.2.1 Angka Kematian Ibu

Angka kematian ibu merupakan kematian ibu per 100.000 kelahiran hidup (Badan Pusat Statistik, 2012). Menurut Kementrian Kesehatan Republik Indonesia (2020), angka kematian ibu merupakan rasio kematian ibu, baik selama masa kehamilan, persalinan, maupun nifas, yang disebabkan kehamilan tersebut atau pengelolaannya, tetapi bukan karena sebab lain seperti kecelakan atau insidental per 100.000 kelahiran hidup.

Penurunan angka kematian ibu dilakukan melalui beberapa upaya, di antaranya (Kementrian Kesehatan Republik Indonesia, 2021):

1. Pelayanan kesehatan bagi ibu hamil oleh tenaga kesehatan yang terlatih di fasilitas pelayanan kesehatan. Pelayanan ini dilakukan selama rentang usia kehamilan ibu yang dikelompokkan menjadi tiga trimester. Adapun cakupan K1 dan K4 yang digunakan sebagai penilaian dalam pelaksanaan pelayanan kesehatan ibu hamil. Cakupan K1 merupakan perbandingan antara banyaknya ibu hamil yang mendapat pelayanan antenatal untuk pertama kalinya dengan banyaknya target ibu hamil dalam suatu wilayah selama satu tahun, sedangkan cakupan K4 merupakan perbandingan antara banyaknya ibu hamil yang mendapat pelayanan antenatal minimal empat kali dengan jumlah target ibu hamil dalam suatu wilayah selama satu tahun.
2. Imunisasi tetanus, baik untuk ibu hamil maupun wanita usia subur, karena kematian akibat infeksi menjadi salah satu penyebab kematian paling banyak bagi ibu. Sasaran imunisasi Td adalah wanita usia subur, yang hamil maupun tidak, pada kelompok umur 15-39 tahun. Ibu hamil dapat dikatakan telah mendapatkan imunisasi Td2+ apabila telah mendapatkan Td2 sampai dengan Td5.
3. Pemberian tablet tambah darah untuk mencegah terjadinya anemia pada ibu hamil, di mana hal tersebut sangat berpengaruh pada pertumbuhan maupun perkembangan janin atau bayi.

4. Pelayanan kesehatan ibu bersalin oleh tenaga kesehatan yang telah terlatih, seperti dokter spesialis kebidanan dan kandungan (SpOG), dokter umum, maupun bidan, yang dilakukan di fasilitas pelayanan kesehatan. McCharty dan Maine (1992) mengungkapkan hasil analisisnya bahwa salah satu penyebab kematian ibu adalah determinan akses ke fasilitas kesehatan. Adapun berdasarkan penelitian Taguchi, Kawabata, Maekawa, Maruo, dan Dewata (2003), yang menyatakan bahwa faktor sosial ekonomi akan mempengaruhi ibu dalam mengakses fasilitas kesehatan. Semakin rendah kondisi ekonomi ibu, maka kemungkinan untuk tidak dapat mengakses fasilitas kesehatan karena mahal akan semakin tinggi (Badan Pusat Statistik, 2020).
5. Pelayanan kontrasepsi yang meliputi konseling, pemberian, pemasangan, serta pencabutan kontrasepsi dalam rahim, termasuk penanganan akibat komplikasi maupun efek samping untuk mencegah kehamilan.